规范场的仿射连络表示

满朝辉*

版本号：1.0.20210804.01

摘要

引力场和规范场的统一有两种途径。一种是将引力场表示为主丛连络，另一种是将规范场表示为仿射连络。Poincaré 规范理论和度量-仿射规范理论采用第一种途径。本文采用第二种途径，其中：

一、规范场与引力场都可表示为仿射连络，它们可以用统一的空间标架来描述。

二、时间可看作关于内外部坐标空间所有维度的总度量，在壳（on-shell）可看作梯度方向，量子理论可看作梯度方向分布的几何理论。于是，规范理论、引力理论和量子理论拥有了相同的几何基础和统一的演化描述。

三、在仿射连络表示中，耦合常数、手征不对称性、PMNS 混合和 CKM 混合能够作为几何性质而自动出现。值得注意的是，PMNS 混合和 CKM 混合可以被解释为对称性降低所自发导致的几何结果，从而无须再被看作拉氏量中的直接假设。

四、用仿射连络表示的规范场的统一理论可以避免诸如 $SU(5)$ 等理论中质子衰变成轻子的问题。

五、夸克的色禁闭会有一种可能的几何解释。

在仿射连络表示中，我们可以更好地理解以上这些物理性质，因此将规范场表示为仿射连络很可能是通往物理学终极理论的必经之路。

关键字：规范场的仿射连络表示，耦合常数的几何意义，时间度量，参考系，梯度方向的分布

*中国，宁夏。Email：`shetcslion@163.com`。微信：shetcslion。

.

目录

1 引言

1.1 背景和目的

我们知道，在规范场理论中，场强和规范协变导数

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \qquad D_\mu = \partial_\mu - igT^a A^a_\mu$$

中都含有耦合常数 g，它表征着相互作用的强度。一个问题是，为什么会有耦合常数 g？

如果我们将规范场用仿射连络来表示，那么可以得到一种很好的理解。例如，用 Γ_{MNP} 来表示规范势，那么不难找到某种特定的条件来使得曲率张量

$$R^M_{NPQ} = \partial_P \Gamma^M_{NQ} - \partial_Q \Gamma^M_{NP} + \Gamma^M_{HP}\Gamma^H_{NQ} - \Gamma^H_{NP}\Gamma^M_{HQ}$$

转变为

$$\begin{aligned} R_{MNPQ} &= \partial_P \Gamma_{MNQ} - \partial_Q \Gamma_{MNP} + \Gamma_{MHP}\Gamma^H_{NQ} - \Gamma^H_{NP}\Gamma_{MHQ} \\ &= \partial_P \Gamma_{MNQ} - \partial_Q \Gamma_{MNP} + G^{RH}(\Gamma_{MHP}\Gamma_{RNQ} - \Gamma_{RNP}\Gamma_{MHQ}). \end{aligned} \tag{1}$$

这时，R_{MNPQ} 可以用来表示场强。另外，对于任意的 ρ_M，我们看到

$$\rho_{M;P} = \partial_P \rho_M - \Gamma^H_{MP}\rho_H = \partial_P \rho_M - G^{RH}\Gamma_{RMP}\rho_H. \tag{2}$$

(1) 和 (2) 意味着耦合常数 g 可以具有几何意义，它来源于 G^{RH}。

这暗示我们，只有当采用仿射连络来表示规范场时，一些物理性质才能被更好地理解。另一方面，在广义相对论中，引力场也是用仿射连络来描述的，因此用仿射连络来统一地描述引力场和规范场是比较方便的。所以研究规范场的仿射连络表示是必要的，这是本文的基本动机。用仿射连络来表示规范场很可能是通往物理学终极理论的必经之路。

我们知道，有以下两种途径来统一引力场和规范场。

一种途径是将引力场表示为主丛连络。把引力场的变换群 $Gravi(3,1)$ 作为主丛的结构群，来建立引力场的规范理论，其局域变换群形如 $Gravi(3,1)\otimes Gauge(n)$，例如 Poincaré 规范理论 [1–11] 和度量-仿射规范理论 [12–23]。这种途径可以直观地理解为

$$\boxed{\text{gravitation theory}} \xrightarrow{\text{be incorporated into}} \boxed{\text{the framework of gauge theory.}}$$

另一种途径是将规范场表示为仿射连络。这就是本文所采用的途径，引力场和规范场都用仿射连络来描述。此外，我们还要建立基本粒子场的仿射连络表示。这种途径可以直观地理解为

$$\boxed{\text{gauge theory}} \xrightarrow{\text{be incorporated into}} \boxed{\text{the framework of gravitation theory.}}$$

1.2 思路和方法

我们把建立规范场的仿射连络表示的问题分为以下三个部分。

（1）怎样的仿射连络既能描述引力场，又适合描述规范场和基本粒子场？

（2）怎样在仿射连络表示中描述这些场的演化？

（3）仿射连络表示中的电磁、弱和强相互作用场有怎样的具体形式？

对于问题（1）：在 Riemann 流形 (M,G) 上，度规张量可表示为 $G_{MN}=\delta_{AB}B_M^AB_N^B$ 和 $G^{MN}=\delta^{AB}C_A^MC_B^N$，其中 B_M^A 和 C_A^M 是半度规，或称标架场。显然半度规比度规更基本，因此，我们希望 B_M^A 或 C_A^M 被看作引力场和规范场的统一的标架场，并且将 B_M^A 或 C_A^M 的标架变换看作规范变换。于是，我们需要更一般的流形 (M,B_M^A) 而不是 Riemann 流形 (M,G)。

接下来，我们用度规和半度规共同构造一个新的连络，它既是仿射连络，又是纤维丛上的连络。这样就可以将引力场和各种规范场统一于由半度规定义的流形 (M,B_M^A)。

另外，我们注意到，在基于主丛连络表示的理论中：

（1）同样是满足 Dirac 方程的几个复值函数，有时用它们指称带电轻子场 l，有时又用它们指称中微子场 ν。这些场函数 l 和 ν 是基于怎样的内在几何构造而获得区分的，这并未明确。

（2）规范势是抽象的，它们不具有内在的几何构造。换句话说，引力场的 Levi-Civita 连络 $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ 是由度规 $g_{\mu\nu}$ 构造的，但规范场的连络 A_μ^a 是由什么几何量构造的并不明确。

相比之下，在本文的仿射连络表示中，我们能够以内部空间的半度规 B_M^A 和 C_A^M 为粒子场 l 和 ν 及规范场 A_μ^a 赋予几何构造。这样一来，它们不再仅仅是群的不可约表示，而且还拥有了具体的几何实体。

对于问题（2）：一个基本的困难是，时间受引力场的影响，但不受规范场的影响，这导致引力场的演化描述与规范场的演化描述有本质的不同。在这种情况下看起来很难在仿射连络表示中得到一个统一的演化理论。不过，我们发现，将时间定义为关于内部坐标空间和外部坐标空间所有维度的总度量，然后用流形的单参数可微变换群来定义演化，这样就能克服以上困难。

既然规范场和引力场都表示为仿射连络，那么荷、流、质量、能量、动量和作用量这些与规范场相联系的性质也必须有相应的仿射表示。这样一来，杨-Mills 方程、能量动量方程、Dirac 方程会都变成梯度方向上的几何性质，换句话说，在壳（on-shell）演化用梯度方向来刻画。相应地，量子理论就可以理解为梯度方向分布的几何理论。

对于问题 (3): 基本的想法是，在 $\mathfrak{D}$ 维流形上，将半度规 B_M^A 和 C_A^M 的 $m,a\in\{4,5,\cdots,\mathfrak{D}\}$ 的分量 B_m^a 和 C_a^m 作为电磁、弱和强相互作用标架场，将 B_M^A 和 C_A^M 的其余分量作为引力标架场。

将仿射连络取为

$$\begin{aligned}\Gamma_{NP}^M &\triangleq \frac{1}{2}\left(\left[{}_{NP}^{M}\right]+\left\{{}_{NP}^{M}\right\}\right)=\frac{1}{2}\left[C_A^M\left(D_PB_N^A\right)+\left\{{}_{NP}^{M}\right\}\right]=\frac{1}{2}\left[C_A^M\left(D_CB_N^A\right)b_P^C+\left\{{}_{NP}^{M}\right\}\right]\\ &=\frac{1}{2}\left[C_A^M\left(\frac{\partial B_N^A}{\partial\zeta^C}+\left({}_{BC}^{A}\right)B_N^B\right)b_P^C+\frac{1}{2}G^{MQ}\left(\frac{\partial G_{NQ}}{\partial x^P}+\frac{\partial G_{PQ}}{\partial x^N}-\frac{\partial G_{NP}}{\partial x^Q}\right)\right]\\ &=\frac{1}{2}\left[\left(C_A^M\frac{\partial B_N^A}{\partial x^P}+C_A^M\left({}_{BP}^{A}\right)B_N^B\right)+\frac{1}{2}G^{MQ}\left(\frac{\partial G_{NQ}}{\partial x^P}+\frac{\partial G_{PQ}}{\partial x^N}-\frac{\partial G_{NP}}{\partial x^Q}\right)\right],\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $b_P^C\triangleq\frac{\partial\zeta^C}{\partial x^P}$ 是局部坐标变换，$\left\{{}_{NP}^{M}\right\}$ 是 Christoffel 符号，$G_{MN}=\delta_{AB}B_M^AB_N^B$，

$$\left[{}_{NP}^{M}\right]\triangleq C_A^M\left(D_PB_N^A\right)=C_A^M\frac{\partial B_N^A}{\partial x^P}+C_A^M\left({}_{BP}^{A}\right)B_N^B$$

称为规范连络，Γ_{NP}^M 称为全连络。$\left({}_{BP}^{A}\right)\triangleq\left({}_{BC}^{A}\right)b_P^C$。

$$\left({}_{BC}^{A}\right)\triangleq\frac{1}{2}C_{A'}^A\left(\frac{\partial B_B^{A'}}{\partial\zeta^C}+\frac{\partial B_C^{A'}}{\partial\zeta^B}\right)$$

称为无挠简单连络。这时

$$\Gamma_{MNP}=\frac{1}{2}\left([MNP]+\{MNP\}\right)=\frac{1}{2}\left[\delta_{AD}B_M^D\left(\frac{\partial B_N^A}{\partial x^P}+\left({}_{BP}^{A}\right)B_N^B\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{NM}}{\partial x^P}+\frac{\partial G_{PM}}{\partial x^N}-\frac{\partial G_{NP}}{\partial x^M}\right)\right].$$

为了简单起见，我们先在不含引力的情况下研究规范场的仿射连络表示。也就是说，设

$$s,i,j=1,2,3;\qquad a,m,n,l,q=4,5,\cdots,\mathfrak{D};\qquad A,B,M,N,P=1,2,\cdots,\mathfrak{D};$$

考虑满足以下条件的 $\mathfrak{D}$ 维流形 (M,B_M^A)：

（1）$B_i^s=\delta_i^s,\ B_i^a=0,\ B_m^s=0$；

（2）$G_{ij}=\delta_{ij},\ G_{mn}=const,\ G_{mi}=0$；

（3）当 $m\neq n$ 时，$G_{mn}=0$。

这时，$\{MNP\}=0$，一般地 $[MNP]\neq 0$。$\Gamma_{MNP}=\frac{1}{2}[MNP]$ 的 $m,n\in\{4,5,\cdots,\mathfrak{D}\}$ 的分量 Γ_{mnP} 可以描述电磁、弱和强相互作用规范势。我们也用仿射连络 Γ_{NP}^M 来构造基本粒子场 ρ_{MN}，其 $m,n\in\{4,5,\cdots,\mathfrak{D}\}$ 的分量 ρ_{mn} 可以描述轻子和夸克的场函数。

度规张量 G^{MN} 的 $m,n\in\{4,5,\cdots,\mathfrak{D}\}$ 的分量 G^{mn} 描述粒子场 ρ_{mn} 与规范势 Γ_{mnP} 的耦合常数，G^{MN} 的其余分量就是引力场的度规。ρ_{MN} 和 Γ_{MNP} 的其余分量为暗物质及其相互作用提供了可能的候选方案。

1.3 内容和组织

本文将展示怎样构造规范场和引力场统一的仿射连络表示。各章节组织如下：

对应于问题（1），第 2 节建立一些必要的数学准备，并讨论上述连络的坐标变换和标架变换。与此同时，为了使描述规范场的语言和描述引力场的语言更加统一和协调，我们推广参考系的观念，并给出严格的数学定义。传统意义上的参考系只是定义在一个局部坐标邻域上，而且只有 $(1+3)$ 维。而本文将定义整个流形上的参考系概念，它有更多的维数，但不同于 Kaluza-Klein 理论 [24–26] 和弦论 [27–39]。这样一来，不论引力场还是规范场都被归结为这一参考系概念的特例。

对应于问题（2），第 3 节建立了规范场的仿射连络表示中的一般演化理论。第 4 节论述了这种一般演化理论在 $(1+3)$ 维经典时空中的应用。

对应于问题（3），第 5 ～ 7 节给出了电磁、弱和强相互作用场的仿射连络表示的具体形式。

一些重要的主题组织如下：

（1）时间被看作关于包括外部坐标空间和内部坐标空间的所有空间维度的总度量。详见定义 3.1.1 和注记 4.2.1 。CPT 反演被理解为坐标全反演和度量全反演的复合。详见第 3.7 节。$(1+3)$ 维传统闵氏坐标 x^{μ} 起源于 $\mathfrak{D}$ 维一般坐标 x^{M}。额外维的构造方式不同于 Kaluza-Klein 理论和弦论。详见第 4.2 节。

（2）实际（on-shell）演化用梯度方向场来刻画。详见第 3.4 、 3.5 、 3.6 、 4.3 节。量子理论被看作梯度方向分布的几何理论。我们展示了梯度方向的两种对偶表示，它们恰好对应着 Schrödinger 绘景和 Heisenberg 绘景。在这些观点下，引力理论和量子理论将变得协调一致，它们会拥有统一的演化描述，而且 Feynman 传播子的定义可以简化成一种更为严格的形式。详见第 3.8 节和 3.9 节。

（3）杨-Mills 方程起源于梯度方向的一个几何性质。我们给出了杨-Mills 方程的仿射连络表示。详见第 3.5 节和第 4.5 节。

（4）能量动量方程起源于梯度方向的一个几何性质。我们给出了质量、能量、动量和作用量的仿射连络表示，详见第 3.6 节、定义 4.3.1 和论述 4.3.1 。进一步地，还给出了 Dirac 方程的仿射连络表示，详见第 4.4 节。

（5）为什么中微子不参与电磁相互作用？为什么右手中微子不会与 W 玻色子发生弱相互作用？在本文的理论中，它们是规范场的仿射连络表示的自然而然的几何结果，因此无须再被看作假设。详见命题 5.2 和命题 7.1 。

（6）第 7 节对轻子的 PMNS 混合、夸克的 CKM 混合以及色禁闭给出了新的理解。也就是说，在规范场的仿射连络表示中，这些物理性质能够理解为流形上的几何性质。

2 数学准备

2.1 几何流形

为了使描述规范场的语言和描述引力场的语言更加统一和协调，我们采用以下定义。

■ **定义 2.1.1**：设 M 是一个 $\mathfrak{D}$ 维连通光滑实流形，$\forall p \in M$，在 p 的邻域 U_p 上取坐标卡 (U_p, φ_{Up})，构成 M 上的坐标覆盖 $\varphi \triangleq \{(U_p, \varphi_{Up})\}_{p\in M}$，称为**逐点覆盖**。为了方便，下面将 U_p 记为 U，φ_{Up} 记为 φ_U。

设 φ 和 ψ 是两个逐点覆盖。对于 p 点附近邻域 U 上的两个坐标系 φ_U 和 ψ_U，如果

$$f_p \triangleq \varphi_U \circ \psi_U^{-1} : \psi_U(U) \to \varphi_U(U),\ \ \xi^A \mapsto x^M$$

是一个光滑同胚，则称 f_p 是一个**局部参考系**。

若对每个 $p \in M$ 赋予一个局部参考系 $f(p)$，且 (6) 式的半度规 B^A_M 和 C^M_A 是 M 上的光滑实函数，则将

$$f : M \to REF,\ \ p \mapsto f(p) \tag{4}$$

称为 M 上的一个**参考系**。将 (M, f) 称为**几何流形**。

2.2 度规和半度规

如无特别声明，则设 $A, B, C, D, E = 1, 2, \cdots, \mathfrak{D}$ 和 $M, N, P, Q, R = 1, 2, \cdots, \mathfrak{D}$。$f(p)$ 在 U_p 上的导函数

$$b^A_M \triangleq \frac{\partial \xi^A}{\partial x^M}, \qquad c^M_A \triangleq \frac{\partial x^M}{\partial \xi^A} \tag{5}$$

在流形 M 上定义了 f 的半度规（或称标架场）B^A_M 和 C^M_A，即

$$B^A_M : M \to \mathbb{R},\ \ p \mapsto\ B^A_M(p) \triangleq (b_{f(p)})^A_M(p), \qquad C^M_A : M \to \mathbb{R},\ \ p \mapsto\ C^M_A(p) \triangleq (c_{f(p)})^M_A(p). \tag{6}$$

设 $\delta_{AB} = \delta^{AB} = \delta^A_B = Kronecker(A, B)$，$\varepsilon_{MN} = \varepsilon^{MN} = \varepsilon^M_N = Kronecker(M, N)$，则 f 的度规张量就是

$$G_{MN} = \delta_{AB} B^A_M B^B_N, \qquad H_{AB} = \varepsilon_{MN} C^M_A C^N_B. \tag{7}$$

类似地，还可定义 $\bar{b}^M_A \triangleq \frac{\partial \xi_A}{\partial x_M},\ \bar{c}^A_M \triangleq \frac{\partial x_M}{\partial \xi_A}$ 和相应的 $\bar{B}^M_A,\ \bar{C}^A_M$。

2.3 仿射连络表示中的规范变换

$\forall p \in M$，$f(p) \triangleq \rho_U \circ \psi_U^{-1}$ 诱导**局部参考系变换**：

$$L_{f(p)}:\ k(p) \triangleq \psi_U \circ \varphi_U^{-1}\ \ \mapsto\ \ \rho_U \circ \varphi_U^{-1} = f(p) \circ k(p),$$

$$R_{f(p)}:\ h(p) \triangleq \varphi_U \circ \rho_U^{-1}\ \ \mapsto\ \ \varphi_U \circ \psi_U^{-1} = h(p) \circ f(p).$$

和 M 上的**参考系变换**

$$L_f : p \mapsto L_{f(p)}, \quad R_f : p \mapsto R_{f(p)}. \tag{8}$$

L_f 和 R_f 也称为**（仿射）规范变换**。

（1）L_f 和 R_f 是恒同变换当且仅当 f 的 $[B^A_M]$ 是单位矩阵。

（2）L_f 和 R_f 是平坦变换当且仅当 $\forall p_1, p_2 \in M,\ \ B^A_M(p_1) = B^A_M(p_2)$。

（3）L_f 和 R_f 是正交变换当且仅当 $\delta_{AB} B^A_M B^B_N = \varepsilon_{MN}$。

M 上的全体参考系变换记作 $GL(M)$，它是 $\bigotimes\limits_{p\in M} GL(\mathfrak{D}, \mathbb{R})_p$ 的子群，其中 $\bigotimes$ 表示外直积。

2.4 全连络的坐标变换与规范连络的标架变换

设流形 M 上有参考系 g 和 $\mathfrak{g}$，记 $\mathcal{G} \triangleq \mathfrak{g} \circ g$，并且 $\forall p \in M$，在 p 的邻域 U 上，$g(p)$ 和 $\mathfrak{g}(p)$ 满足

$$(U, x^M) \xleftarrow{g(p)} (U, \zeta^A) \xleftarrow{\mathfrak{g}(p)} (U, \beta^{A'}).$$

在几何流形 $(M, \mathfrak{g})$ 上定义**无挠简单连络**D 和连络系数 $\left({}^{A}_{BC}\right)_{\mathfrak{g}}$ 如下：

$$D\frac{\partial}{\partial \zeta^B} \triangleq (\omega_{\mathfrak{g}})^A_B \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^A} = \left({}^{A}_{BC}\right)_{\mathfrak{g}} d\zeta^C \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^A} = \frac{1}{2}(C_{\mathfrak{g}})^A_{A'} \left(\frac{\partial (B_{\mathfrak{g}})^{A'}_B}{\partial \zeta^C} + \frac{\partial (B_{\mathfrak{g}})^{A'}_C}{\partial \zeta^B} \right) d\zeta^C \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^A}. \tag{9}$$

那么，我们可以计算标架场 $\frac{\partial}{\partial x^N}$ 的绝对导数

$$\begin{aligned} D\frac{\partial}{\partial x^N} &= D\left((B_g)^B_N \frac{\partial}{\partial \zeta^B} \right) = d(B_g)^B_N \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^B} + (B_g)^B_N D\frac{\partial}{\partial \zeta^B} \\ &= \frac{\partial (B_g)^B_N}{\partial \zeta^C} d\zeta^C \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^B} + (B_g)^B_N \left({}^{A}_{BC}\right)_{\mathfrak{g}} d\zeta^C \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^A} = \left(\frac{\partial (B_g)^A_N}{\partial \zeta^C} + (B_g)^B_N \left({}^{A}_{BC}\right)_{\mathfrak{g}} \right) d\zeta^C \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^A}, \end{aligned}$$

于是就得到了

$$D_C (B_g)^A_N = \frac{\partial (B_g)^A_N}{\partial \zeta^C} + (B_g)^B_N \left({}^{A}_{BC}\right)_{\mathfrak{g}}.$$

记 $D_P \triangleq (b_{g(p)})^C_P D_C$，这样我们就可以在流形 $(M, \mathcal{G})$ 上定义所需要的**规范连络**了，它定义为

$$\left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}} \triangleq (C_g)^M_A D_P (B_g)^A_N = (C_g)^M_A \frac{\partial (B_g)^A_N}{\partial x^P} + (C_g)^M_A \left({}^{A}_{BP}\right)_{\mathfrak{g}} (B_g)^B_N. \tag{10}$$

重要的是，$\left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}}$ 既是 $(M, \mathcal{G})$ 上的仿射连络，又是标架丛上的连络。

（1）$\left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}}$ 作为 $(M, \mathcal{G})$ 上的仿射连络。在坐标变换 $L_{k(p)} : (U, x^M) \to (U, x^{M'}),\ \ b^M_{M'} \triangleq \dfrac{\partial x^M}{\partial x^{M'}},\ c^{M'}_M \triangleq \dfrac{\partial x^{M'}}{\partial x^M}$ 下，$(B_g)^A_M \mapsto (B_g)^A_{M'} = b^M_{M'} (B_g)^A_M,\ \ (C_g)^M_A \mapsto (C_g)^{M'}_A = c^{M'}_M (C_g)^M_A$，于是规范连络 $\left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}}$ 就会按

$$L_{k(p)}: \ \left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}} \ \mapsto \ \left[{}^{M'}_{N'P'}\right]_{\mathcal{G}} = c^{M'}_M \left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}} b^N_{N'} b^P_{P'} + c^{M'}_M \frac{\partial b^M_{N'}}{\partial x^{P'}} \tag{11}$$

变换。根据 (11) 式，在坐标变换下，**全连络**

$$
\begin{aligned}
(\Gamma_{\mathcal{G}})^M_{NP} &\triangleq \frac{1}{2}\left(\left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}} + \left\{{}^{M}_{NP}\right\}_{\mathcal{G}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left((C_g)^M_A \frac{\partial (B_g)^A_N}{\partial x^P} + (C_g)^M_A \left({}^{A}_{BP}\right)_{\mathfrak{g}} (B_g)^B_N\right) + \frac{1}{2}(G_{\mathcal{G}})^{MQ}\left(\frac{\partial (G_{\mathcal{G}})_{NQ}}{\partial x^P} + \frac{\partial (G_{\mathcal{G}})_{PQ}}{\partial x^N} - \frac{\partial (G_{\mathcal{G}})_{NP}}{\partial x^Q}\right)\right]
\end{aligned} \tag{12}
$$

按

$$
L_{k(p)}:\ \ (\Gamma_{\mathcal{G}})^M_{NP} \ \mapsto\ (\Gamma_{\mathcal{G}})^{M'}_{N'P'} = c^{M'}_M (\Gamma_{\mathcal{G}})^M_{NP} b^N_{N'} b^P_{P'} + c^{M'}_M \frac{\partial b^M_{N'}}{\partial x^{P'}} \tag{13}
$$

变换。

（2）$\left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}}$ 作为标架丛上的连络。在标架变换 $L_k:(M,\mathcal{G})\mapsto(M,\mathcal{G}'),\ \ \frac{\partial}{\partial x^M}\mapsto\frac{\partial}{\partial x^{M'}}=(B_k)^M_{M'}\frac{\partial}{\partial x^M}$ 下，$(B_g)^A_M\mapsto(B_{g'})^A_{M'}=(B_k)^M_{M'}(B_g)^A_M,\ \ (C_g)^M_A\mapsto(C_{g'})^{M'}_A=(C_k)^{M'}_M(C_g)^M_A$，规范连络 $\left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}}$ 按

$$
L_k:\ \ \left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}} \ \mapsto\ \left[{}^{M'}_{N'P'}\right]_{\mathcal{G}'} = \left[{}^{M'}_{N'P}\right]_{\mathcal{G}'} b^P_{P'} = \left((C_k)^{M'}_M \left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}} (B_k)^N_{N'} + (C_k)^{M'}_M \frac{\partial (B_k)^M_{N'}}{\partial x^P}\right) b^P_{P'} \tag{14}
$$

变换。(11) 式和 (14) 式说明了 $\left[{}^{M}_{NP}\right]_{\mathcal{G}}$ 既是仿射连络，又是标架丛上的连络。

将 (11)～(14) 式应用于曲率张量

$$
\begin{aligned}
\left[{}^{M}_{NPQ}\right] &\triangleq \frac{\partial \left[{}^{M}_{NQ}\right]}{\partial x^P} - \frac{\partial \left[{}^{M}_{NP}\right]}{\partial x^Q} + \left[{}^{M}_{HP}\right]\left[{}^{H}_{NQ}\right] - \left[{}^{H}_{NP}\right]\left[{}^{M}_{HQ}\right], \\
\left\{{}^{M}_{NPQ}\right\} &\triangleq \frac{\partial \left\{{}^{M}_{NQ}\right\}}{\partial x^P} - \frac{\partial \left\{{}^{M}_{NP}\right\}}{\partial x^Q} + \left\{{}^{M}_{HP}\right\}\left\{{}^{H}_{NQ}\right\} - \left\{{}^{H}_{NP}\right\}\left[{}^{M}_{HQ}\right\}, \\
R^M_{NPQ} &\triangleq \frac{\partial \Gamma^M_{NQ}}{\partial x^P} - \frac{\partial \Gamma^M_{NP}}{\partial x^Q} + \Gamma^M_{HP}\Gamma^H_{NQ} - \Gamma^H_{NP}\Gamma^M_{HQ},
\end{aligned}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
&L_k:\ \ \left[{}^{M}_{NPQ}\right]_{\mathcal{G}} \ \mapsto\ \left[{}^{M'}_{N'P'Q'}\right]_{\mathcal{G}'} = \left[{}^{M'}_{N'PQ}\right]_{\mathcal{G}'} b^P_{P'} b^Q_{Q'} = \left((C_k)^{M'}_M \left[{}^{M}_{NPQ}\right]_{\mathcal{G}} (B_k)^N_{N'}\right) b^P_{P'} b^Q_{Q'}, \\
&L_{k(p)}:\ \ \left[{}^{M}_{NPQ}\right]_{\mathcal{G}} \ \mapsto\ \left[{}^{M'}_{N'P'Q'}\right]_{\mathcal{G}} = c^{M'}_M \left[{}^{M}_{NPQ}\right]_{\mathcal{G}} b^N_{N'} b^P_{P'} b^Q_{Q'}, \\
&L_{k(p)}:\ \ \left\{{}^{M}_{NPQ}\right\}_{\mathcal{G}} \ \mapsto\ \left\{{}^{M'}_{N'P'Q'}\right\}_{\mathcal{G}} = c^{M'}_M \left\{{}^{M}_{NPQ}\right\}_{\mathcal{G}} b^N_{N'} b^P_{P'} b^Q_{Q'}, \\
&L_{k(p)}:\ \ (R_{\mathcal{G}})^M_{NPQ} \ \mapsto\ (R_{\mathcal{G}})^{M'}_{N'P'Q'} = c^{M'}_M (R_{\mathcal{G}})^M_{NPQ} b^N_{N'} b^P_{P'} b^Q_{Q'}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

由 (15) 式可以看到，不含引力的 $\left[{}^{M}_{NPQ}\right]_{\mathcal{G}}$ 既是仿射连络的曲率张量，又是标架丛上的曲率张量；含有引力的 $(R_{\mathcal{G}})^M_{NPQ}$ 是仿射连络的曲率张量，而不是标架丛上的曲率张量。换句话说，在规范变换 L_k 下，$\left[{}^{M}_{NPQ}\right]_{\mathcal{G}}$ 和 $\left[{}^{M'}_{N'PQ}\right]_{\mathcal{G}'}$ 表示相同的物理态，而 $(R_{\mathcal{G}})^M_{NPQ}$ 和 $(R_{\mathcal{G}'})^{M'}_{N'PQ}$ 表示不同的物理态。这说明 $(R_{\mathcal{G}})^M_{NPQ}$ 中的引力场使得规范标架 B^A_M 和 C^M_A 具有物理效应。

3 规范场仿射连络表示中的演化

既然有了所需的仿射连络，接下来我们必须解决的问题是，怎样在仿射连络表示中来描述演化。

在现有的理论中，时间受引力场的影响，但不受规范场的影响，这导致引力场的演化描述与规范场的演化描述有本质的不同。在这种情况下很难在仿射连络表示中得到一个统一的演化理论。我们采用以下方式来克服这种困难。

3.1 时间与空间的关系

■ **定义 3.1.1**：设 $M=P\times N$ 且 $r\triangleq\dim P=3$，又设

$$A,B,M,N=1,\cdots,\mathfrak{D}\,;\qquad s,i=1,\cdots,r\,;\qquad a,m=r+1,\cdots,\mathfrak{D}.$$

在几何流形 (M,f) 上，由

$$\begin{aligned}(d\xi^0)^2&\triangleq\sum_{A=1}^{\mathfrak{D}}(d\xi^A)^2=\delta_{AB}d\xi^A d\xi^B=G_{MN}dx^M dx^N,\\(dx^0)^2&\triangleq\sum_{M=1}^{\mathfrak{D}}(dx^M)^2=\varepsilon_{MN}dx^M dx^N=H_{AB}d\xi^A d\xi^B\end{aligned}\tag{16}$$

定义的 $d\xi^0$ 和 dx^0 称为**空间总度量**，也称为**时间度量**。又设

$$\begin{aligned}(d\xi^{(P)})^2\triangleq\sum_{s=1}^{r}(d\xi^s)^2,\quad(d\xi^{(N)})^2\triangleq\sum_{a=r+1}^{\mathfrak{D}}(d\xi^a)^2,\\(dx^{(P)})^2\triangleq\sum_{i=1}^{r}(dx^i)^2,\quad(dx^{(N)})^2\triangleq\sum_{m=r+1}^{\mathfrak{D}}(dx^m)^2.\end{aligned}$$

$d\xi^{(N)}$ 和 $dx^{(N)}$ 被看作原时度量。为方便起见，将 P 称为**外部空间**，N 称为**内部空间**。

■ **注记 3.1.1**：以上定义蕴含了一种新的时空观。在这种方式下，时间与空间的关系不同于 Minkowski 坐标 x^μ $(\mu=0,1,2,3)$。时间和空间不再是具有同等地位的分量，而是总量与分量的关系。稍后可以看到，时间反映的是全维度空间中的总的演化，而一个特定空间维度仅仅反映一个特定方向上的部分演化。

3.2 作为子流形的演化路径

■ **定义 3.2.1**：设在流形 M 上有参考系 f、g、$\mathfrak{f}$、$\mathfrak{g}$，并且 $\forall p\in M$，在 p 点邻域 U 上满足

$$(U,\alpha^{A'})\xrightarrow{\mathfrak{f}(p)}(U,\xi^A)\xrightarrow{f(p)}(U,x^M)\xleftarrow{g(p)}(U,\zeta^A)\xleftarrow{\mathfrak{g}(p)}(U,\beta^{A'}).\tag{17}$$

记 $\mathcal{F}\triangleq\mathfrak{f}\circ f$，$\mathcal{G}\triangleq\mathfrak{g}\circ g$，则称 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ **相对运动和相互作用**，也称 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{G}$ 中演化，或称 $\mathcal{F}$ 在几何流形 $(M,\mathcal{G})$ 上演化。这时同样地也有，$\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{F}$ 中演化，或者说 $\mathcal{G}$ 在 $(M,\mathcal{F})$ 上演化。

从 (10) 式得知，在 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 中，规范场源自 $\mathfrak{f}$ 和 $\mathfrak{g}$，引力场 $(G_{\mathcal{F}})_{MN}$ 和 $(G_{\mathcal{G}})_{MN}$ 分别受 $\mathfrak{f}$ 和 $\mathfrak{g}$ 的影响。在接下来的几节中，我们将一步一步地描述它们的演化。

设有一个单参数可微变换群

$$\varphi_X : M \times \mathbb{R} \to M$$

作用于流形 M，满足 $\varphi_X(p,0)=p$。这时 φ_X 在 M 上确定了一个光滑切矢场 X，如果 X 处处非零，则称 φ_X 是一组**演化路径**，X 是一个**演化方向场**。设 $T \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，则将正则嵌入

$$L_p \triangleq \varphi_{X,p} : T \to M,\ t \mapsto \varphi_X(p,t) \tag{18}$$

称为过 p 点的一条**演化路径**。切矢 $\frac{d}{dt} \triangleq [L_p] = X(p)$ 称为 p 点处的一个**演化方向**。为方便起见，我们也记 $L_p \triangleq L_p(T) \subset M$，那么

$$\pi : L_p \to M,\ q \mapsto q \tag{19}$$

也是正则嵌入。如果不强调路径 L_p 过 p 点，L_p 也可直接记为 L。

为了描述物理演化，接下来我们将严格地描述参考系 f 和 g 反映在演化路径 L 上的数学性质。

■ **定义 3.2.2**：设坐标邻域 (U,ξ^A)，(U,x^M) 和 (U,ζ^A) 的时间度量分别为 $d\xi^0$，dx^0 和 $d\zeta^0$。在 $U_L \triangleq U \cap L_p$ 上有参数方程

$$\begin{aligned} &\xi^A = \xi^A(x^0), \quad x^M = x^M(\xi^0), \quad \zeta^A = \zeta^A(x^0), \\ &\xi^0 = \xi^0(x^0), \quad\ \ x^0 = x^0(\xi^0), \quad\ \ \zeta^0 = \zeta^0(x^0). \end{aligned} \tag{20}$$

以 f 为例，在 U_L 上根据 (20) 式定义

$$\begin{aligned} b_0^A &\triangleq \frac{d\xi^A}{dx^0}, \quad b_0^0 \triangleq \frac{d\xi^0}{dx^0}, \quad \varepsilon_0^M \triangleq \frac{dx^M}{dx^0} = b_0^0 c_0^M = b_0^A c_A^M, \\ c_0^M &\triangleq \frac{dx^M}{d\xi^0}, \quad c_0^0 \triangleq \frac{dx^0}{d\xi^0}, \quad \delta_0^A \triangleq \frac{d\xi^A}{d\xi^0} = c_0^0 b_0^A = c_0^M b_M^A. \end{aligned}$$

定义 $d\xi_0 \triangleq \frac{dx^0}{d\xi^0}dx^0$ 和 $dx_0 \triangleq \frac{d\xi^0}{dx^0}d\xi^0$，它们诱导了 $\frac{d}{d\xi_0}$ 和 $\frac{d}{dx_0}$，满足 $\left\langle \frac{d}{d\xi_0}, d\xi_0 \right\rangle = 1$，$\left\langle \frac{d}{dx_0}, dx_0 \right\rangle = 1$。所以我们还可定义

$$\begin{aligned} \bar{b}_A^0 &\triangleq \frac{d\xi_A}{dx_0}, \quad \bar{b}_0^0 \triangleq \frac{d\xi_0}{dx_0}, \quad \bar{\varepsilon}_M^0 \triangleq \frac{dx_M}{dx_0} = \bar{b}_0^0 \bar{c}_M^0 = \bar{b}_A^0 \bar{c}_M^A, \\ \bar{c}_M^0 &\triangleq \frac{dx_M}{d\xi_0}, \quad \bar{c}_0^0 \triangleq \frac{dx_0}{d\xi_0}, \quad \bar{\delta}_A^0 \triangleq \frac{d\xi_A}{d\bar{\xi}_0} = \bar{c}_0^0 \bar{b}_A^0 = \bar{c}_M^0 \bar{b}_A^M. \end{aligned}$$

类似于第 2.2 节，它们在整个 L 上确定了光滑函数：

$$B_0^A : L \to \mathbb{R},\ p \mapsto B_0^A(p) \triangleq (b_{f(p)})_0^A(p), \qquad C_0^M : L \to \mathbb{R},\ p \mapsto C_0^M(p) \triangleq (c_{f(p)})_0^M(p),$$

$$\bar{B}_A^0 : L \to \mathbb{R},\ p \mapsto \bar{B}_A^0(p) \triangleq (\bar{b}_{f(p)})_A^0(p), \qquad \bar{C}_M^0 : L \to \mathbb{R},\ p \mapsto \bar{C}_M^0(p) \triangleq (\bar{c}_{f(p)})_M^0(p),$$

$$B_0^0 : L \to \mathbb{R},\ p \mapsto B_0^0(p) \triangleq (b_{f(p)})_0^0(p), \qquad C_0^0 : L \to \mathbb{R},\ p \mapsto C_0^0(p) \triangleq (c_{f(p)})_0^0(p),$$

$$\bar{B}_0^0 : L \to \mathbb{R},\ p \mapsto \bar{B}_0^0(p) \triangleq (\bar{b}_{f(p)})_0^0(p), \qquad \bar{C}_0^0 : L \to \mathbb{R},\ p \mapsto \bar{C}_0^0(p) \triangleq (\bar{c}_{f(p)})_0^0(p).$$

为了方便，仍然使用符号 ε 和 δ，那么还有光滑函数：

$$\varepsilon_0^M \triangleq B_0^0 C_0^M = B_0^A C_A^M, \qquad \delta_0^A \triangleq C_0^0 B_0^A = C_0^M B_M^A, \qquad G_{00} \triangleq B_0^0 B_0^0 = G_{MN}\varepsilon_0^M \varepsilon_0^N.$$

$$\bar{\varepsilon}_M^0 \triangleq \bar{B}_0^0 \bar{C}_M^0 = \bar{B}_A^0 \bar{C}_M^A, \qquad \bar{\delta}_A^0 \triangleq \bar{C}_0^0 \bar{B}_A^0 = \bar{C}_M^0 \bar{B}_A^M, \qquad G^{00} \triangleq C_0^0 C_0^0 = G^{MN}\bar{\varepsilon}_M^0 \bar{\varepsilon}_N^0.$$

通过简单的计算即可验证 $dx_0 = G_{00}dx^0$ 和 $\frac{d}{dx_0} = G^{00}\frac{d}{dx^0}$ 在 L 上都是成立的。

3.3 演化引理

我们有以下两个演化引理。杨-Mills 方程、能量动量方程、Dirac 方程的仿射连络表示都依赖于它们。

■ **定义 3.3.1**：$\forall p \in L$，设 $T_p(M)$ 和 $T_p(L)$ 是切空间，$T_p^*(M)$ 和 $T_p^*(L)$ 是余切空间。正则嵌入 $\pi : L \to M,\ q \mapsto q$ 诱导了切映射和余切映射

$$\begin{aligned} &\pi_* : T_p(L) \to T_p(M),\ \ [\gamma_L] \mapsto [\pi \circ \gamma_L], \\ &\pi^* : T_p^*(M) \to T_p^*(L),\ \ df \mapsto d(f \circ \pi). \end{aligned} \tag{21}$$

显然，π_* 是单射，π^* 是满射。$\forall \frac{d}{dt_L} \in T_p(L),\ \frac{d}{dt} \in T_p(M),\ df \in T_p^*(M),\ df_L \in T_p^*(L)$，当且仅当

$$\frac{d}{dt} = \pi_*\left(\frac{d}{dt_L}\right), \quad df_L = \pi^*(df) \tag{22}$$

成立时，我们记

$$\frac{d}{dt} \cong \frac{d}{dt_L}, \quad df \simeq df_L. \tag{23}$$

那么，我们有以下两个明显成立的命题。

■ **命题 3.3.1**：如果 $\frac{d}{dt} \cong \frac{d}{dt_L}$ 且 $df \simeq df_L$，那么

$$\left\langle \frac{d}{dt}, df \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt_L}, df_L \right\rangle. \tag{24}$$

■ **命题 3.3.2**：以下结论成立：

$$\begin{cases} w^M \dfrac{\partial}{\partial x^M} \cong w^0 \dfrac{d}{dx^0} & \Leftrightarrow \quad w^M = w^0 \varepsilon_0^M, \\ w_M dx^M \simeq w_0 dx^0 & \Leftrightarrow \quad w_M \varepsilon_0^M = w_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{w}_M \dfrac{\partial}{\partial x_M} \cong \bar{w}_0 \dfrac{d}{dx_0} & \Leftrightarrow \quad \bar{w}_M = \bar{w}_0 \bar{\varepsilon}_M^0, \\ \bar{w}^M dx_M \simeq \bar{w}^0 dx_0 & \Leftrightarrow \quad \bar{w}^M \bar{\varepsilon}_M^0 = \bar{w}^0. \end{cases} \tag{25}$$

3.4 作为梯度的实际演化

设 T 是 M 上的一个光滑 n 阶张量场。限制在 (U, x^M) 上，$T \triangleq t\left\{\frac{\partial}{\partial x} \otimes dx\right\}$，其中 $\left\{\frac{\partial}{\partial x} \otimes dx\right\}$ 表示由若干 $\frac{\partial}{\partial x^M}$ 和 dx^M 生成的张量基底，全部张量系数都简单地记为 $t : U \to \mathbb{R}$。

设 D 是全连络。考虑 T 的绝对微分 $DT \triangleq t_{;Q}dx^Q \otimes \left\{\frac{\partial}{\partial x} \otimes dx\right\}$。记

$$Dt \triangleq t_{;Q}dx^Q, \quad \nabla t \triangleq t_{;Q}\frac{\partial}{\partial x_Q}.$$

$\forall p\in M$，称积分曲线 $L_p\triangleq\varphi_{\nabla t,p}$ 为 T 的一条**梯度线**。稍后可看到，梯度算子 ∇ 刻画了**实际 (on-shell) 演化**。

对任意的演化路径 L，设 $U_L\triangleq U\cap L$，记 $t_L\triangleq t|_{U_L}$ 和 $t_{L;0}\triangleq t_{;Q}\varepsilon_0^Q$ 以及

$$D_L t_L\triangleq t_{L;0}dx^0,\quad \nabla_L t_L\triangleq t_{L;0}\frac{d}{dx_0}.$$

■ **命题 3.4.1**：以下结论是明显成立的：

（1）$Dt\simeq D_L t_L$ 当且仅当 L 是任意演化路径。

（2）$\nabla t\cong\nabla_L t_L$ 当且仅当 L 是 T 的梯度线。

■ **注记 3.4.1**：更一般地，设有张量 $U\triangleq u_Q dx^Q\otimes\{\frac{\partial}{\partial x}\otimes dx\}$，其中除了 Q 之外的所有指标都省略不表。$u_Q dx^Q$ 唯一地确定了一个**特征方向**$u_Q\frac{\partial}{\partial x_Q}$。

如果一阶线性偏微分方程组 $t_{;Q}=u_Q$ 的解 t 存在，那么就有 $Dt=u_Q dx_Q$ 和 $\nabla t=u_Q\frac{d}{dx_Q}$。这样一来，在演化方向 $[L]=u_Q\frac{\partial}{\partial x_Q}$ 上，以下结论成立：

$$Dt\simeq D_L t_L,\quad \nabla t\cong\nabla_L t_L, \tag{26}$$

其中 $D_L t_L\triangleq u_0 dx^0$，$\nabla_L t_L\triangleq u_0\frac{d}{dx_0}$，$u_0\triangleq u_Q\varepsilon_0^Q$。

现在，对于有张量形式 U 的任意几何性质，都能用 ∇t 的形式表述其实际（on-shell）演化。下面两节讨论两种重要的实际演化，一是参考系自身势场的实际演化，二是一个参考系的荷在另一个参考系的势场中的实际演化。

3.5 势场的实际演化及 Yang-Mills 方程的仿射连络表示

文献 [40] 的表 I 提出了规范场术语和纤维丛术语之间著名的对应关系。不过其未能找到源 J_μ^K 所对应的数学对象。在本节中我们以第 3.4 节的观点对这个问题给出一个回答，并给出杨-Mills 方程的仿射连络表示。

为了得到一般的含引力的杨-Mills 方程，我们对它的构造必须使用全连络。按照定义 3.2.1 设 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{G}$ 中演化，即 $\forall p\in M,\ \ (U,\alpha^{A'})\xrightarrow{\mathfrak{f}(p)}(U,\xi^A)\xrightarrow{f(p)}(U,x^M)\xleftarrow{g(p)}(U,\zeta^A)\xleftarrow{\mathfrak{g}(p)}(U,\beta^{A'})$。在坐标系 (U,x^M) 中总是采用以下记号。

（1）设几何流形 $(M,\mathcal{F})$ 和 $(M,\mathcal{G})$ 的全连络分别是 $(\Gamma_{\mathcal{F}})^M_{NP}$ 和 $(\Gamma_{\mathcal{G}})^M_{NP}$，它们由 (12) 式定义。分别用冒号“:”和分号“;”表示在 $(M,\mathcal{F})$ 和 $(M,\mathcal{G})$ 上取协变导数，例如

$$u^Q{}_{:P}=\frac{\partial u^Q}{\partial x^P}+(\Gamma_{\mathcal{F}})^Q_{HP}u^H,\quad u^Q{}_{;P}=\frac{\partial u^Q}{\partial x^P}+(\Gamma_{\mathcal{G}})^Q_{HP}u^H.$$

（2）设 $(M,\mathcal{F})$ 和 $(M,\mathcal{G})$ 的曲率张量系数分别为 K^M_{NPQ} 和 R^M_{NPQ}，即：

$$\begin{aligned}K^M_{NPQ} &\triangleq \frac{\partial(\Gamma_{\mathcal{F}})^M_{NQ}}{\partial x^P} - \frac{\partial(\Gamma_{\mathcal{F}})^M_{NP}}{\partial x^Q} + (\Gamma_{\mathcal{F}})^H_{NQ}(\Gamma_{\mathcal{F}})^M_{HP} - (\Gamma_{\mathcal{F}})^H_{NP}(\Gamma_{\mathcal{F}})^M_{HQ},\\ R^M_{NPQ} &\triangleq \frac{\partial(\Gamma_{\mathcal{G}})^M_{NQ}}{\partial x^P} - \frac{\partial(\Gamma_{\mathcal{G}})^M_{NP}}{\partial x^Q} + (\Gamma_{\mathcal{G}})^H_{NQ}(\Gamma_{\mathcal{G}})^M_{HP} - (\Gamma_{\mathcal{G}})^H_{NP}(\Gamma_{\mathcal{G}})^M_{HQ}.\end{aligned} \tag{27}$$

记 ${K^M_{NPQ}}^{:P} \triangleq (G_{\mathcal{F}})^{PP'} K^M_{NPQ:P'}$。在任意演化路径 L 上我们定义

$$\rho^M_{N0}dx^0 \triangleq \pi^*\left({K^M_{NPQ}}^{:P}dx^Q\right) \in T^*(L).$$

根据定义 3.3.1 和命题 3.3.2 的演化引理，我们得到 $\rho^M_{N0} = {K^M_{NPQ}}^{:P}\varepsilon^Q_0$，以及

$${K^M_{NPQ}}^{:P}dx^Q \simeq \rho^M_{N0}dx^0.$$

设 $\nabla t = {K^M_{NPQ}}^{:P}\frac{\partial}{\partial x_Q}$。根据命题 3.4.1 ，当且仅当 $\forall p \in L$，$[L_p] = \nabla t|_p$ 时有

$${K^M_{NPQ}}^{:P}\frac{\partial}{\partial x_Q} \cong \rho^M_{N0}\frac{d}{dx_0}.$$

再次应用命题 3.3.2 的演化引理，可以得到

$${K^M_{NPQ}}^{:P} = \rho^M_{N0}\bar{\varepsilon}^0_Q.$$

记 $j^M_{NQ} \triangleq \rho^M_{N0}\bar{\varepsilon}^0_Q$，那么当且仅当 $[L_p] = \nabla t|_p$ 时有

$${K^M_{NPQ}}^{:P} = j^M_{NQ}, \tag{28}$$

称为 $\mathcal{F}$ 的**（仿射）杨-Mills 方程**，并且它包含了引力的影响，这使得规范标架 $(B_f)^A_M$ 和 $(C_f)^M_A$ 具有物理效应。根据 (15) 式，我们知道 (28) 式是坐标协变的，而且如果将引力除去，那么它也是规范协变的。

这样，就得到了以下两个结果：

（1）杨-Mills 方程起源于 ∇t 方向上的几何性质，换句话说，规范场的实际 (on-shell) 演化由 ∇t 所描述。

（2）得到了荷与流的数学起源。我们知道，演化路径 L 是流形 M 的一维嵌入子流形，荷 ρ^M_{N0} 源自从 M 至 L 的拉回 π^*，而流 j^M_{NQ} 起源于与 ρ^M_{N0} 相联系的 ∇t。如果令 (M,f) 是完全平坦的流形，即 $(B_f)^A_M = \delta^A_M$，$(C_f)^M_A = \delta^M_A$，那么通过计算发现 ρ^M_{N0} 仍然可以是非零的，这说明 ρ^M_{N0} 最终是来源于 $(M,\mathfrak{f})$。

■ **定义 3.5.1**：将实值的

$$\rho_{MN0} \triangleq G_{MH}\rho^H_{N0} \tag{29}$$

称为 $\mathcal{F}$ 的**一般荷的场函数**，简称为**荷**。

3.6 荷的实际演化及质量、能量、动量和作用量的仿射连络表示

为了兼容规范场的仿射连络表示，质量、能量、动量和作用量也必须用与仿射连络相联系的形式来定义。我们将在本节和第 4.3 节中给出它们。

设 $F_0 \triangleq \rho_{MN0} dx^M \otimes dx^N$，为了方便将 $\mathcal{F}$ 的荷 ρ_{MN0} 简单地记为 ρ_{MN}。设 D 是 $(M,\mathcal{G})$ 的全连络，那么

$$DF_0 \triangleq D\rho_{MN} \otimes dx^M \otimes dx^N, \qquad \nabla F_0 \triangleq \nabla\rho_{MN} \otimes dx^M \otimes dx^N,$$

其中 $D\rho_{MN} \triangleq \rho_{MN;Q} dx^Q$，$\nabla\rho_{MN} \triangleq \rho_{MN;Q}\frac{\partial}{\partial x_Q}$。由命题 3.4.1 ，当且仅当 $\forall p \in M$ 演化方向取为 $[L_p] = \nabla\rho_{MN}|_p$ 时，

$$D\rho_{MN} \simeq D_L\rho_{MN}, \qquad \nabla\rho_{MN} \cong \nabla_L\rho_{MN}$$

成立，即

$$\rho_{MN;Q} dx^Q \simeq \rho_{MN;0} dx^0, \qquad \rho_{MN;Q}\frac{\partial}{\partial x_Q} \cong \rho_{MN;0}\frac{d}{dx_0}. \tag{30}$$

■ **定义 3.6.1**：为更加方便，将 ρ_{MN} 进一步简记为 ρ。在仿射连络表示中，ρ 的能量动量定义为

$$\begin{aligned} &E_0 \triangleq \rho_{;0} \triangleq \rho_{;Q}\varepsilon_0^Q, \quad p_Q \triangleq \rho_{;Q}, \quad H_0 \triangleq \frac{d\rho}{dx^0}, \quad P_Q \triangleq \frac{\partial\rho}{\partial x^Q}, \\ &E^0 \triangleq \rho^{;0} \triangleq \rho^{;Q}\bar{\varepsilon}_Q^0, \quad p^Q \triangleq \rho^{;Q}, \quad H^0 \triangleq \frac{d\rho}{dx_0}, \quad P^Q \triangleq \frac{\partial\rho}{\partial x_Q}. \end{aligned} \tag{31}$$

■ **命题 3.6.1**：在 M 上任一点 p 处，当且仅当演化方向 $[L_p] = \nabla\rho|_p$ 时，方程

$$E_0 E^0 = p_Q p^Q \tag{32}$$

成立。(32) 式就是 ρ 的**（仿射）能量动量方程**。

证明：根据以上讨论，$\forall p \in M$，$[L_p] = \nabla\rho|_p$ 等价于

$$p_Q dx^Q \simeq E_0 dx^0, \qquad p_Q\frac{\partial}{\partial x_Q} \cong E_0\frac{d}{dx_0}. \tag{33}$$

然后由命题 3.3.1 可以得到梯度方向 $\nabla\rho$ 上的方向导数：

$$\left\langle p_Q\frac{\partial}{\partial x_Q}, p_M dx^M \right\rangle = \left\langle E_0\frac{d}{dx_0}, E_0 dx^0 \right\rangle,$$

也就是 $G^{QM}p_Q p_M = G^{00}E_0E_0$，或 $p_Q p^Q = E_0E^0$。□

■ **命题 3.6.2**：在 M 上任一点 p 处，方程

$$p^Q = E^0\frac{dx^Q}{dx^0}, \quad p_Q = E_0\frac{dx_Q}{dx_0} \tag{34}$$

成立当且仅当演化方向 $[L_p] = \nabla\rho|_p$。

证明：根据命题 3.3.2 的演化引理，可立即从 (33) 式得到 (34) 式。□

注记：在梯度方向 $\nabla\rho$ 上，(34) 式与传统的 $p=mv$ 是一致的。这样一来，在仿射连络表示中，能量动量方程和动量的传统定义都起源于梯度方向上的几何性质。换句话说，粒子场 ρ 的实际（on-shell）演化由梯度方向场 $\nabla\rho$ 来描述。

■ **定义 3.6.2**：设 $\mathcal{P}(b,a)$ 是 M 上起于点 a 且终于点 b 的路径的全体。又设 $L\in\mathcal{P}(b,a)$，且演化参数 x^0 满足 $t_a\triangleq x^0(a)<x^0(b)\triangleq t_b$。定义 ρ 的**基本仿射作用量**

$$\mathfrak{s}(L)\triangleq\int_L D\rho=\int_L p_Q dx^Q=\int_{t_a}^{t_b}E_0dx^0. \tag{35}$$

于是，$\delta\mathfrak{s}(L)=0$ 当且仅当 L 是 ρ 的梯度线。

特别地，在 $\mathcal{G}$ 是正交的情况下，还可按如下方式定义作用量。设 $(M,\mathcal{G})$ 上有 Dirac 代数 γ^M、γ_N 满足

$$\gamma^M\gamma^N+\gamma^N\gamma^M=2G^{MN},\qquad \gamma_M\gamma_N+\gamma_N\gamma_M=2G_{MN},\qquad \gamma_M\gamma^M=1.$$

在 ρ 的梯度方向上，由方程 (32) 得

$$p_Qp^Q=E_0E^0\ \Leftrightarrow\ \rho_{;Q}\rho^{;Q}=\rho_{;0}\rho^{;0}\ \Leftrightarrow\ G^{PQ}\rho_{;P}\rho_{;Q}=G^{00}\rho_{;0}\rho_{;0}\ \Leftrightarrow\ (\gamma^P\gamma^Q+\gamma^Q\gamma^P)\rho_{;P}\rho_{;Q}=2\rho_{;0}\rho_{;0}$$

$$\Leftrightarrow\ (\gamma^P\rho_{;P})(\gamma^Q\rho_{;Q})+(\gamma^Q\rho_{;Q})(\gamma^P\rho_{;P})=2\rho_{;0}\rho_{;0}\ \Leftrightarrow\ (\gamma^P\rho_{;P})^2=(\rho_{;0})^2.$$

不失一般性取 $\gamma^P\rho_{;P}=\rho_{;0}$，所以在 ρ 的梯度方向上有

$$\gamma^P\rho_{;P}dx^0=\rho_{;0}dx^0=\varepsilon_0^P\rho_{;P}dx^0=D\rho. \tag{36}$$

于是，我们可以采用

$$s(L)\triangleq\int_L\left(\gamma^P\rho_{;P}dx^0+D\rho\right)=\int_{t_a}^{t_b}\left(\gamma^P\rho_{;P}+\varepsilon_0^P\rho_{;P}\right)dx^0=\int_{t_a}^{t_b}\left(\gamma^P\rho_{;P}+E_0\right)dx^0. \tag{37}$$

注记 3.6.1 和注记 4.4.1 解释了这种定义的合理性。在 ρ 的梯度方向上有 $s(L)=2\mathfrak{s}(L)$，所以 $\mathfrak{s}(L)$ 和 $s(L)$ 是一致的。

■ **注记 3.6.1**：在第 4.2 节的闵氏坐标下，演化参数由 x^0 换为 $\tilde{x}^\tau$，这时仍然存在一个梯度方向 $\tilde{\nabla}\tilde{\rho}$ 的概念。相应地，(35) 式和 (37) 式会表现为

$$\tilde{\mathfrak{s}}(L)\triangleq\int_L\tilde{D}\tilde{\rho}=\int_L\tilde{p}_\mu d\tilde{x}^\mu=\int_{\tau_a}^{\tau_b}\tilde{m}_\tau d\tilde{x}^\tau,\qquad \tilde{s}(L)=\int_{\tau_a}^{\tau_b}(\gamma^\mu\tilde{\rho}_{;\mu}+\tilde{m}_\tau)\,d\tilde{x}^\tau,$$

其中 $\tilde{m}_\tau$ 是静质量，$\tilde{x}^\tau$ 是原时。

■ **注记 3.6.2**：定义以下记号

$$[\rho\Gamma_G]\triangleq\frac{\partial\rho_{MN}}{\partial x^G}-\rho_{MN;G}=\rho_{MH}\Gamma^H_{NG}+\rho_{HN}\Gamma^H_{MG},\qquad [\rho R_{PQ}]\triangleq\rho_{MH}R^H_{NPQ}+\rho_{HN}R^H_{MPQ}.$$

然后，通过一些计算可以得到

$$f_P \triangleq p_{P;0} = E_{0;P} - p_Q \varepsilon^Q_{0;P} + [\rho R_{PQ}]\varepsilon^Q_0,$$

此即一般 Lorentz 力公式的仿射连络表示。进一步见论述 4.3.1 。

3.7 仿射连络表示中的反演变换

在仿射连络表示中，CPT 反演被理解为坐标和度量全反演。设 $i, j = 1, 2, 3$ 且 $m, n = 4, 5, \cdots, \mathfrak{D}$。

设参考系 k 的局部坐标表示为 $x'^j = -\delta^j_i x^i$，$x'^n = \delta^n_m x^m$，则宇称反演可表示为

$$P \triangleq L_k : x^i \to -x^i, x^m \to x^m.$$

设参考系 h 的局部坐标表示为 $x'^j = \delta^j_i x^i$，$x'^n = -\delta^n_m x^m$，则电荷共轭反演可表示为

$$C \triangleq L_h : x^i \to x^i, x^m \to -x^m.$$

时间坐标反演可表示为

$$T_0 : x^0 \to -x^0.$$

坐标全反演可表示为

$$CPT_0 : x^Q \to -x^Q, x^0 \to -x^0. \tag{38}$$

度量的正负号标示了两个相反的演化方向。设 N 是 M 的闭子流形，其度量是 $dx^{(N)}$。记 M 的所有闭子流形的全体为 $\mathfrak{B}(M)$，那么**度量全反演**可表示为

$$T^{(M)} \triangleq \prod_{N \in \mathfrak{B}(M)} \left(dx^{(N)} \to -dx^{(N)} \right). \tag{39}$$

记时间反演 $T \triangleq T^{(M)} T_0$，则坐标全反演 CPT_0 和度量全反演 $T^{(M)}$ 的联合变换则为

$$(CPT_0)(T^{(M)}) = CPT. \tag{40}$$

总结以上论述，我们有：

$$CPT_0 : x^Q \to -x^Q,\ x^0 \to -x^0,\ dx^Q \to dx^Q,\ dx^0 \to dx^0,$$

$$T^{(M)} : x^Q \to x^Q,\ x^0 \to x^0,\ dx^Q \to -dx^Q,\ dx^0 \to -dx^0,$$

$$CPT : x^Q \to -x^Q,\ x^0 \to -x^0,\ dx^Q \to -dx^Q,\ dx^0 \to -dx^0.$$

仿射连络表示下的 CPT 不变性是非常清晰的。具体来说，在 $(M, \mathcal{G})$ 上对 $\mathcal{G}$ 进行 CPT 变换，记 $s \triangleq \int_L D\rho$，又记 $D_P e^{is} \triangleq \left(\frac{\partial}{\partial x^P} - i[\rho \Gamma_P] \right) e^{is}$。那么通过简单的运算就能得到

$$CPT : D\rho \to D\rho, \quad D_P e^{is} \to -D_P e^{is}.$$

■ **注记 3.7.1**：量子力学中波函数的时间反演变换 $T : \psi(x,t) \to \psi^*(x,-t)$ 带有一个复共轭。在仿射连络表示下，我们知道这个复共轭可以理解为度量全反演 $T^{(M)}$ 的直接数学结果。

3.8 梯度方向场的两种对偶描述

■ **论述 3.8.1**：设 X 和 Y 是流形 M 上的非零光滑切矢场，又设 L_Y 是单参数可微变换群 φ_Y 诱导的 Lie 导数算子。那么可以根据熟知的定理 [41] 得到 Lie 导数方程

$$[X,Y] = L_Y X. \tag{41}$$

设 $\forall p \in M$，$Y(p)$ 是单位长度切矢，即 $||Y(p)|| = 1$，又设 φ_Y 的参数是 x^0。那么在演化路径 $L \triangleq \varphi_{Y,p}$ 上有

$$Y \cong \frac{d}{dx^0}. \tag{42}$$

这样一来，(41) 式也可表示为

$$[X,Y] = \frac{d}{dx^0}X. \tag{43}$$

另一方面，$\forall df \in T(M)$ 和 $df_L \triangleq \pi^*(df)$，由 (42) 式和命题 3.3.1 我们有 $\langle Y, df\rangle = \left\langle \frac{d}{dx^0}, df_L \right\rangle$，即

$$Yf = \frac{d}{dx^0}f_L. \tag{44}$$

■ **定义 3.8.1**：设 $H \triangleq ||\nabla\rho||^{-1}\nabla\rho = \varepsilon_0^M \frac{\partial}{\partial x^M} \cong \frac{d}{dx^0}$，显然有 $\forall p \in M$，$||H(p)|| = 1$。当且仅当取 $Y = H$ 时，我们将 (43) 和 (44) 式分别称为实值的**（仿射）Heisenberg 方程**和**（仿射）Schrödinger 方程**，即：

$$[X,H] = \frac{d}{dx^0}X, \quad Hf = \frac{d}{dx^0}f_L. \tag{45}$$

■ **论述 3.8.2**：以上两个方程都描述了梯度方向场，从而体现了实际演化。梯度方向的这两种对偶描述给出了 Heisenberg 绘景和 Schrödinger 绘景的实值仿射连络表示。

找出梯度方向的几种不同的复值表示并不是难事，例如，一种复值表示是第 4.4 节中的仿射 Dirac 方程，另一种复值表示如下。

设 $\psi \triangleq fe^{is_L}$，其中从定义 3.6.2 中取 $s_L \triangleq s(L)$ 或 $s_L \triangleq \mathfrak{s}(L)$ 都可以。根据方程 (45)，在 L 上容易得到

$$[X,H] = \frac{d}{dx^0}X, \quad H\psi = \frac{d\psi}{dx^0}. \tag{46}$$

这与传统的 Heisenberg 方程和 Schrödinger 方程（采用自然单位制 $\hbar = 1,\ c = 1$）

$$[X,-iH] = \frac{\partial}{\partial t}X, \quad -iH\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{47}$$

是一致的，它们有坐标对应关系

$$\frac{\partial}{\partial(ix^k)} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \frac{d}{dx^0}.$$

我们知道，$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \frac{d}{dx^0}$ 来源于演化参数是 x^τ 还是 x^0 的差异。虚数单位 i 来源于正规坐标 x^1, x^2, x^3, x^τ 和闵氏坐标 x^1, x^2, x^3, x^0 之间的差异。也就是说，正规坐标满足 $(dx^0)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^\tau)^2$，但闵氏坐标满足

$$(dx^\tau)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = (dx^0)^2 + (d(ix^1))^2 + (d(ix^2))^2 + (d(ix^3))^2.$$

这样就导致了虚数单位 i 出现于对应关系

$$ix^k \leftrightarrow x^k.$$

所以方程 (46) 和 (47) 有完全相同的本质，其差异仅仅来源于不同的坐标表示。

坐标表示的差异无关乎几何本质和物理本质。我们注意到，梯度方向的取值依赖于几何，它与方程是实值还是复值形式毫不相干。因此，不必拘泥于诸如实值还是复值这样的代数表示，而应该着眼于梯度方向这样的几何本质。

复值形式的优点是它适用于描述传播子的相干叠加，然而这是独立于以上论述的，放在第 3.9 节讨论。

3.9 作为梯度方向分布的量子演化

从命题 3.6.1 我们看到，在仿射连络表示中，经典的实际（on-shell）演化用梯度方向来描述。那么很自然地，量子演化就应该用梯度方向的分布来描述。

几何流形 $(M, \mathcal{G})$ 上的梯度方向的分布会受到 $(M, \mathcal{G})$ 的弯曲形状的影响，换句话说，梯度方向的分布可以用于反映 $(M, \mathcal{G})$ 的形状。这就是仿射连络表示的量子理论描述物理实在的方式。

为了获知物理实在的全貌，必须完全地描述几何流形的形状才行。对于单次观测来说：

（1）描述物理实在的是参考系，而不是点，所以单个点的坐标不足以完整地描述物理实在的位置信息。

（2）通过对动量进行单次观测只能获得单个梯度方向的信息，这无法反映几何流形形状的全貌。

量子演化为我们提供了一种保证，它使我们能够通过多次观测，得到梯度方向的分布，从而能够描述几何流形形状的全貌。接下来，我们对仿射连络表示中的量子演化进行严格的数学描述。

■ **定义 3.9.1**：设 ρ 是 M 上的一个几何性质，比如是 f 的荷，$H \triangleq \nabla\rho$ 是 ρ 在 $(M, \mathcal{G})$ 上的梯度方向场。

设 $\mathfrak{T}$ 是第 2.3 节的平坦变换 L_k 的全体。$\forall T \in \mathfrak{T}$，$T : f \mapsto Tf$ 诱导了变换 $T^* : \rho \mapsto T^*\rho$。记

$$|\rho| \triangleq \{\rho_T \triangleq T^*\rho | T \in \mathfrak{T}\}, \qquad |H| \triangleq \{H_T \triangleq \nabla\rho_T | T \in \mathfrak{T}\}.$$

$\forall a \in M$，$|H|$ 限制在 a 点处记作 $|H(a)| \triangleq \{H_T(a) | T \in \mathfrak{T}\}$。将 $|H|$ 称为梯度方向场 H 的**总分布**。

■ **注记 3.9.1**：当 T 固定时，H_T 可以反映 $(M, \mathcal{G})$ 的形状；当 a 固定时，$|H(a)|$ 可以反映 $(M, \mathcal{G})$ 的形状。但是，当 T 和 a 都固定时，$H_T(a)$ 是固定的单个梯度方向，它无法反映 $(M, \mathcal{G})$ 的形状，换句话说，如

果 ρ 的动量 p_T 和位置 x_a 都能确定地被观测，那么物理实在 $\mathcal{G}$ 就不可知了，因此是不可接受的。这是量子不确定性在仿射连络表示中的体现。

■ **定义 3.9.2**：设 φ_H 是与 H 对应的单参数可微变换群，其参数是 x^0。$\forall a \in M$，根据定义 3.2.1 ，设 $\varphi_{H,a}$ 是过 a 点的演化路径，满足 $\varphi_{H,a}(0) = a$。这时，$\forall t \in \mathbb{R}$，记

$$\varphi_{|H|,a} \triangleq \{\varphi_{X,a} | X \in |H|\}, \qquad \varphi_{|H|,a}(t) \triangleq \{\varphi_{X,a}(t) | X \in |H|\}.$$

$\forall \Omega \subseteq \mathfrak{T}$，我们还记 $|H_\Omega| \triangleq \{H_T | T \in \Omega\} \subseteq |H|$ 以及

$$\varphi_{|H_\Omega|,a} \triangleq \{\varphi_{X,a} | X \in |H_\Omega|\} \subseteq \varphi_{|H|,a}, \qquad \varphi_{|H_\Omega|,a}(t) \triangleq \{\varphi_{H,a}(t) | X \in |X_\Omega|\} \subseteq \varphi_{|H|,a}(t).$$

$\forall a \in M$，$|H_\Omega|$ 限制在 a 点处记作 $|H_\Omega(a)| \triangleq \{H_T(a) | T \in \Omega\}$。

■ **注记 3.9.2**：起初 $t = 0$ 时 $|\rho|$ 的梯度方向 $|H(a)|$ 直观上是从 a 点出发均匀地指向四面八方的，如果 $(M, \mathcal{G})$ 不平坦，那么当演化至某个 $t > 0$ 时刻，集合 $\varphi_{|H|,a}(t)$ 上的梯度方向的分布将不再像起初那么均匀。以下定义精确地刻画了这种不均匀性。

■ **定义 3.9.3**：对 $\mathcal{G}$ 取逆变换 $L_{\mathcal{G}^{-1}}$ 得到平凡的 $e \triangleq L_{\mathcal{G}^{-1}}(\mathcal{G})$，这时 $(M, \mathcal{G})$ 将变为平坦的 (M, e)。$|\rho|$ 在 $(M, \mathcal{G})$ 上的梯度方向场 $|H|$ 也将变为 $|\rho|$ 在 (M, e) 上的梯度方向场 $|O|$。相应地，$\forall t \in \mathbb{R}$，$\varphi_{|H|,a}(t)$ 变为 $\varphi_{|O|,a}(t)$。简而言之，$L_{\mathcal{G}^{-1}}$ 诱导了如下两类映射：

$$\mathcal{G}_*^{-1} : |H| \to |O|, \quad \mathcal{G}_{**}^{-1} : \varphi_{|H|,a} \to \varphi_{|O|,a}.$$

$\forall T \in \mathfrak{T}$，记 $\mathfrak{N} \triangleq \{N \in \mathfrak{T} \mid \det N = \det T\}$。由于 $\mathfrak{T} \cong GL(\mathfrak{D}, \mathbb{R})$，关于 $GL(\mathfrak{D}, \mathbb{R})$ 的拓扑，设 $\mathfrak{U}$ 是 T 的某个邻域。取 $\Omega = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$，那么

$$|O_\Omega| = \mathcal{G}_*^{-1}(|H_\Omega|), \quad \varphi_{|O_\Omega|,a} = \mathcal{G}_{**}^{-1}\left(\varphi_{|H_\Omega|,a}\right).$$

设 μ 是流形 M 上的 Borel 测度。$\forall t \in \mathbb{R}$，我们知道

$$\varphi_{|H_\mathfrak{N}|,a}(t) \simeq \varphi_{|O_\mathfrak{N}|,a}(t) \simeq \mathbb{S}^{\mathfrak{D}-1}.$$

于是 $\varphi_{|H_\Omega|,a}(t) \subseteq \varphi_{|H_\mathfrak{N}|,a}(t)$ 和 $\varphi_{|O_\Omega|,a}(t) \subseteq \varphi_{|O_\mathfrak{N}|,a}(t)$ 都是 Borel 集，因而是可测的。记

$$\mu_a\left(\varphi_{|H_\Omega|,a}(t)\right) \triangleq \mu\left(\mathcal{G}_{**}^{-1}\left(\varphi_{|H_\Omega|,a}(t)\right)\right) = \mu\left(\varphi_{|O_\Omega|,a}(t)\right).$$

当 $\mathfrak{U} \to T$ 时，$\Omega \to T$，$|H_\Omega| \to H_T$，$|H_\Omega(a)| \to H_T(a)$，并且 $\varphi_{|H_\Omega|,a}(t) \to b \triangleq \varphi_{H_T,a}(t)$。

为简单起见，记 $L \triangleq \varphi_{H_T,a}$。这时，$a = L(0)$，$b = L(t)$，并且记 $p_a \triangleq [L_a] = H_T(a)$，$p_b \triangleq [L_b] = H_T(b)$。

由于 μ_a 相对于 μ 是绝对连续的，故而 Radon-Nikodym 定理 [42] 保证了以下极限是存在的。将 Radon-Nikodym 导数

$$W_L(b,a) \triangleq \frac{d\mu_a}{d\mu_b} \triangleq \lim_{\mathfrak{U}\to T} \frac{\mu_a\left(\varphi_{|H_\Omega|,a}(t)\right)}{\mu\left(\varphi_{|H_\Omega|,a}(t)\right)} = \lim_{\mathfrak{U}\to T} \frac{\mu\left(\mathcal{G}_{**}^{-1}\left(\varphi_{|H_\Omega|,a}(t)\right)\right)}{\mu\left(\varphi_{|H_\Omega|,a}(t)\right)} = \lim_{\mathfrak{U}\to T} \frac{\mu\left(\varphi_{|O_\Omega|,a}(t)\right)}{\mu\left(\varphi_{|H_\Omega|,a}(t)\right)} \tag{48}$$

称为**位置表象中 $|H|$ 沿 L 的分布密度。**

在 a 点的一个邻域 U 上，$\forall T \in \mathfrak{T}$，记 $H_T(a)$ 的法截面为 $N_{H_T,a} \triangleq \{n \in U \mid H_T(a)\cdot(n-a)=0\}$。定义 $N_{H_T,a}(t) \triangleq \{\varphi_{H_T,x}(t) \mid x \in N_{H_T,a}\}$。这样一来，$N_{H_T,a} = N_{H_T,a}(0)$，$N_{H_T,b} \triangleq N_{H_T,a}(t)$。当 $U \to a$ 时，$N_{H_T,a} \to a$，$N_{H_T,a}(t) \to b \triangleq \varphi_{H_T,a}(t)$。将 Radon-Nikodym 导数

$$Z_L(b,a) \triangleq \frac{d\mu(a)}{d\mu(b)} \triangleq \lim_{U\to a} \frac{\mu(N_{H_T,a})}{\mu(N_{H_T,b})} = \lim_{U\to a} \frac{\mu(N_{H_T,a})}{\mu(N_{H_T,a}(t))} \tag{49}$$

称为**动量表象中 $|H|$ 沿 L 的分布密度。**

总之，$W_L(b,a)$ 和 $Z_L(b,a)$ 用两种不同的方式描述了 b 点邻近的梯度线的密度。它们有以下明显的性质。

■ **命题 3.9.1**：设 L 是梯度线，$\forall a,b,c \in L$ 满足 $L(x_a^0)=a$，$L(x_b^0)=b$，$L(x_c^0)=c$ 且 $x_b^0 > x_c^0 > x_a^0$，那么

$$W_L(b,a) = W_L(b,c)W_L(c,a), \qquad Z_L(b,a) = Z_L(b,c)Z_L(c,a).$$

■ **定义 3.9.4**：如果 $\exists \rho' \in |\rho|$ 使得 L 是 ρ' 的一条梯度线，那么也称 L 是 $|\rho|$ 的一条梯度线。

■ **注记 3.9.3**：对于任意的 a 和 b，讨论 $|\rho|$ 从 a 到 b 的梯度线总是有意义的。这是因为，即便 ρ 从 a 点出发的梯度线不经过 b 点，只需要对 f 进行一次第 2.3 节的某个平坦变换 T 得到 $\rho' \triangleq T_*\rho$，就能使 ρ' 从 a 点出发的梯度线恰好经过 b 点。由于 $\rho, \rho' \in |\rho|$，我们不去区分它们，统一用 $|\rho|$ 就好。直观地来说，当 $|\rho|$ 取两个不同的初始动量时，分别呈现为 ρ 和 ρ'。

■ **论述 3.9.1**：有了以上准备，我们就获得了一种新的方式来严格地描述传播子的构造。

对起于 a 终于 b 的任一路径 L，简单地记 $||L|| \triangleq \int_L dx^0$。设 $\mathcal{P}(b,a)$ 是起于 a 终于 b 的路径的全体。记

$$\mathcal{P}(b,x_b^0;a,x_a^0) \triangleq \{L \mid L \in \mathcal{P}(b,a),\ ||L|| = x_b^0 - x_a^0\}.$$

$\forall L \in \mathcal{P}(b,x_b^0;a,x_a^0)$，无妨令 $L(x_a^0)=a$，$L(x_b^0)=b$。这样 $\mathcal{P}(b,x_b^0;a,x_a^0)$ 就是从 $L(x_a^0)=a$ 到 $L(x_b^0)=b$ 的所有路径 L 的全体。

抽象地，传播子定义为运动方程的 Green 函数，具体地，传播子还需要一个构造性的定义。一种构造方式是用 Feynman 路径积分

$$K(b,x_b^0;a,x_a^0) \triangleq \int_{\mathcal{P}(b,x_b^0;a,x_a^0)} e^{is} dL. \tag{50}$$

但是 $\mathcal{P}(b,x_b^0;a,x_a^0)$ 中的冗余路径实在太多了，导致：(1) 在 $\mathcal{P}(b,x_b^0;a,x_a^0)$ 上很难一般地定义测度 dL；(2) 在进行一些计算时会造成不必要的无穷大。

为了解决这一问题，我们尝试将求和范围从 $\mathcal{P}(b,x_b^0;a,x_a^0)$ 缩小为 $H(b,x_b^0;a,x_a^0)$，其中 $H(b,x_b^0;a,x_a^0)$ 是 $|\rho|$ 的从 $L(x_a^0)=a$ 到 $L(x_b^0)=b$ 的所有梯度线 L 的全体。这样 (50) 式就转变为

$$K(b,x_b^0;a,x_a^0)=\int_{H(b,x_b^0;a,x_a^0)}\Psi(L)e^{is}dL.$$

我们注意到，只要在位置表象中取梯度线 L 的概率幅 $\Psi(L)$ 满足 $[\Psi(L)]^2=W_L(b,a)$，或者在动量表象中取 $[\Psi(L)]^2=Z_L(b,a)$，就恰好可以与哥本哈根解释相一致。这为传播子给出了以下新的构造性定义。

■ **定义 3.9.5**：设 $|\rho|$ 符合定义 3.9.1 ，记 $H\triangleq\nabla\rho$。

设 $\mathcal{L}(b,a)$ 是 $|\rho|$ 的起于 a 终于 b 的梯度线的全体。记

$$H(b,x_b^0;a,x_a^0)\triangleq\{L\mid L\in\mathcal{L}(b,a),\ ||L||=x_b^0-x_a^0\}.$$

设 $\mathcal{L}(p_b,p_a)$ 是 $|\rho|$ 的起始方向是 p_a 终止方向是 p_b 的梯度线的全体。记

$$H(p_b,x_b^0;p_a,x_a^0)\triangleq\{L\mid L\in\mathcal{L}(p_b,p_a),\ ||L||=x_b^0-x_a^0\}.$$

设 dL 是 $H(b,x_b^0;a,x_a^0)$ 上的一个 Borel 测度。考虑到注记 4.4.1 ，设 s 是定义 3.6.2 的仿射作用量 $s(L)$。

$$K(b,x_b^0;a,x_a^0)\triangleq\int_{H(b,x_b^0;a,x_a^0)}\sqrt{W_L(b,a)}e^{is}dL. \tag{51}$$

称为 $|\rho|$ 由 (a,x_a^0) 到 (b,x_b^0) 的**位置表象中的传播子**。若设 dL 是 $H(p_b,x_b^0;p_a,x_a^0)$ 上的一个 Borel 测度，则将

$$\mathcal{K}(p_b,x_b^0;p_a,x_a^0)\triangleq\int_{H(p_b,x_b^0;p_a,x_a^0)}\sqrt{Z_L(b,a)}e^{is}dL. \tag{52}$$

称为 $|\rho|$ 由 (p_a,x_a^0) 到 (p_b,x_b^0) 的**动量表象中的传播子**。

■ **论述 3.9.2**：现在，(51) 和 (52) 是严格定义的，但 Feynman 路径积分 (50) 目前尚不具有严格的数学定义，这使得我们不可能获得（以位置表象为例）

$$\int_{H(b,x_b^0;a,x_a^0)}\sqrt{W_L(b,a)}e^{is}dL=\int_{\mathcal{P}(b,x_b^0;a,x_a^0)}e^{is}dL$$

的严格的数学证明。我们注意到，梯度方向的分布密度 $W_L(b,a)$ 和 $Z_L(b,a)$ 在量子演化的概率解释与几何解释之间建立了联系。因此可以基于概率解释直观地认为等号两边是同一种东西。

■ **论述 3.9.3**：QFT 的量子化方法是成功的，在仿射连络表示中也是适用的，但本文不讨论它。我们尝试提出更多的思路来理解仿射连络表示中的场的量子化。

（1）若根据定义 3.6.2 取

$$\mathfrak{s} = \int_L D\rho = \int_L p_Q dx^Q = \int_L E_0 dx^0,$$

其中 D 是 $(M, \mathcal{G})$ 的全连络，则对于 $H \triangleq \nabla\rho$ 的分布，我们知道

$$K(b, x_b^0; a, x_a^0) \triangleq \int_{\nabla\rho(b,x_b^0;a,x_a^0)} \sqrt{W_L(b,a)} e^{i\mathfrak{s}} dL, \quad \mathcal{K}(p_b, x_b^0; p_a, x_a^0) \triangleq \int_{\nabla\rho(p_b,x_b^0;p_a,x_a^0)} \sqrt{Z_L(b,a)} e^{i\mathfrak{s}} dL$$

描述了能量动量的量子化。这时，$\nabla\rho(b, x_b^0; a, x_a^0)$ 中的每一条梯度线都对应着一组能量动量本征值。这与传统的理论是一致的，这启发我们考虑以下新的想法来执行规范场的荷与流的量子化。

（2）若根据第 3.5 节取

$$\mathfrak{s} = \int_L Dt = \int_L K_{NPQ}^{M\ \ :P} dx^Q = \int_L \rho_{N0}^M dx^0,$$

其中 D 是 $(M, \mathcal{F})$ 的全连络，则对于 $H \triangleq \nabla t$ 的分布，我们知道

$$K(b, x_b^0; a, x_a^0) \triangleq \int_{\nabla t(b,x_b^0;a,x_a^0)} \sqrt{W_L(b,a)} e^{i\mathfrak{s}} dL, \quad \mathcal{K}(p_b, x_b^0; p_a, x_a^0) \triangleq \int_{\nabla t(p_b,x_b^0;p_a,x_a^0)} \sqrt{Z_L(b,a)} e^{i\mathfrak{s}} dL$$

描述了荷与流的量子化。需要强调的是，这不是场的能量动量的量子化，而是场本身的量子化，它表现为量子化的（例如离散的）荷与流。

4 经典时空中的规范场的仿射连络表示

第 3 节建立的新框架是用 $\mathfrak{D}$ 维一般坐标 x^M 讨论的，这比 $(1+3)$ 维传统闵氏坐标 x^μ 更加一般。$(dx^0)^2 = \sum_{M=1}^{\mathfrak{D}} (dx^M)^2$ 是内、外部空间的总度量，$(dx^\tau)^2 = \sum_{m=4}^{\mathfrak{D}} (dx^m)^2$ 是内部空间度量。

（1）$\mathfrak{D}$ 维一般坐标 x^M $(M = 1, 2, \cdots, \mathfrak{D})$ 的演化参数是 x^0。演化路径 L 的参数方程表示为 $x^M = x^M(x^0)$。

（2）$(1+3)$ 维闵氏坐标 x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ 的演化参数是 x^τ。演化路径 L 的参数方程表示为 $x^\mu = x^\mu(x^\tau)$。坐标 x^μ 适用于下面定义的 $(1+3)$ 维经典时空子流形。

4.1 经典时空子流形

设 (M, f) 上有一个光滑切矢场 X，若 $\forall p \in M$，$X(p) = b^A \left.\frac{\partial}{\partial \xi^A}\right|_p = c^M \left.\frac{\partial}{\partial x^M}\right|_p$ 满足 b^a 不全为零且 c^m 不全为零，$a, m = r+1, \cdots, \mathfrak{D}$，则称 X **指向内部空间**。对任一演化路径 $L \triangleq \varphi_{X,p}$，也称 L **指向内部空间**。

设 $M = P \times N$，$\mathfrak{D} \triangleq dimM$，$r \triangleq dimP = 3$。$X$ 是 M 上的光滑切矢场，取定点 $o \in M$。如果 X 指向内部空间，那么存在唯一的 $(1+3)$ 维嵌入子流形 $\gamma : \tilde{M} \to M,\ p \mapsto p$ 和 $\tilde{M}$ 上唯一的光滑切矢场 $\tilde{X}$，使得：

(i) $P \times \{o\}$ 是 $\tilde{M}$ 的闭子流形；(ii) 切映射 $\gamma_* : T(\tilde{M}) \to T(M)$ 满足 $\forall q \in \tilde{M}$，$\gamma_* : \tilde{X}(q) \mapsto X(q)$。

这样的 $\tilde{M}$ 称为**经典时空子流形**。

设 $\varphi_X: M\times\mathbb{R}\to M$ 和 $\varphi_{\tilde{X}}: \tilde{M}\times\mathbb{R}\to\tilde{M}$ 分别是与 X 和 $\tilde{X}$ 对应的单参数可微变换群，那么 $\varphi_{\tilde{X}} = \varphi_X|_{\tilde{M}\times\mathbb{R}}$。于是经典时空中的演化可由 $\varphi_{\tilde{X}}$ 描述。需要注意的是：

（1）$\tilde{M}$ 继承了 M 的一部分几何性质，但不是全部。$\tilde{M}$ 所反映的物理性质并不完整。

（2）限制在 $\tilde{M}$ 上，$\tilde{X}$ 与 X 一一对应。为方便起见，下文在 $\tilde{M}$ 上不去区分记号 X 和 $\tilde{X}$，统一记为 X。

（3）$\tilde{M}$ 上的任一路径 $\tilde{L}: T\to\tilde{M}, t\mapsto p$ 唯一对应着 M 上的路径 $L\triangleq\gamma\circ\tilde{L}: T\to M,\ \ t\mapsto p$。显然 L 和 $\tilde{L}$ 的像集是相同的，即 $L(T)=\tilde{L}(T)$。为方便起见，下文在 $\tilde{M}$ 上不去区分记号 L 和 $\tilde{L}$，统一记为 L。

4.2 经典时空参考系

设有几何流形 (M,f) 及其经典时空子流形 $\tilde{M}$。又设 $L\triangleq\varphi_{\tilde{X},a}$ 是 $\tilde{M}$ 上的一条演化路径。设 $p\in L$ 且 U 是 p 的坐标邻域。根据定义 3.2.2，设 U 上的 $f(p)$ 和 $U_L\triangleq U\cap L$ 上的 $f_L(p)$ 满足：

$$f(p)\ :\ \xi^A=\xi^A(x^M)=\xi^A(x^0),\quad \xi^0=\xi^0(x^0),\qquad A,M=1,2,\cdots,\mathfrak{D}. \tag{53}$$

那么以下结论成立：

（1）在 $\tilde{U}\triangleq U\cap\tilde{M}$ 上存在唯一的局部参考系 $\tilde{f}(p)$ 满足

$$\tilde{f}(p)\ :\ \xi^U=\xi^U(x^K)=\xi^U(x^0),\quad \xi^0=\xi^0(x^0),\qquad U,K=1,2,3,\tau. \tag{54}$$

（2）若 L 指向内部空间，则 $\tilde{f}(p)$ 的以上坐标系 $(\tilde{U},\xi^U)$ 和 $(\tilde{U},x^K)$ 在 $\tilde{U}$ 上唯一确定坐标系 $(\tilde{U},\tilde{\xi}^\alpha)$ 和 $(\tilde{U},\tilde{x}^\mu)$，使 $\tilde{f}(p)$ 也满足

$$\tilde{f}(p)\ :\ \tilde{\xi}^\alpha=\tilde{\xi}^\alpha\left(\tilde{x}^\mu\right)=\tilde{\xi}^\alpha\left(\tilde{x}^\tau\right),\quad \tilde{\xi}^\tau=\tilde{\xi}^\tau\left(\tilde{x}^\tau\right),\qquad \alpha,\mu=0,1,2,3 \tag{55}$$

且坐标满足

$$\tilde{\xi}^s=\xi^s,\ \ \tilde{\xi}^\tau=\xi^\tau,\ \ \tilde{\xi}^0=\xi^0,\ \ \tilde{x}^i=x^i,\ \ \tilde{x}^\tau=x^\tau,\ \ \tilde{x}^0=x^0.$$

也就是说，$\tilde{f}(p)$ 就是传统意义上的参考系，它有 (54) 和 (55) 两种不同的坐标表示。将

$$\tilde{f}:\tilde{M}\to REF_{\tilde{M}},\ p\mapsto\tilde{f}(p)\in REF_p$$

称为**经典时空参考系**。这样一来，惯性系可以严格地按以下方式来理解。设有几何流形 $(\tilde{M},\tilde{g})$，$F_{\tilde{g}}$ 是 $\tilde{g}$ 诱导的参考系变换。

（1）如果 $\tilde{\delta}_{\alpha\beta}\tilde{B}^\alpha_\mu\tilde{B}^\beta_\nu=\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}$，我们称 $\tilde{g}$ 是 **(Lorentz) 正交的**。这时 $F_{\tilde{g}}$ 就是局部 Lorentz 变换。

（2）若 $\tilde{B}^\alpha_\mu$ 和 $\tilde{C}^\mu_\alpha$ 都是 $\tilde{M}$ 上的常数，则称 $\tilde{g}$ 是**平坦的**。

（3）若 $\tilde{g}$ 既正交又平坦，则称 $\tilde{g}$ 是**惯性系**。这时 $F_{\tilde{g}}$ 就是 Lorentz 变换。

■ **注记 4.2.1**：由

$$(d\tilde{\xi}^{\tau})^2=(d\xi^0)^2-\sum_{s=1}^{3}(d\xi^s)^2=\tilde{\delta}_{\alpha\beta}d\tilde{\xi}^{\alpha}d\tilde{\xi}^{\beta}=\tilde{G}_{\mu\nu}d\tilde{x}^{\mu}d\tilde{x}^{\nu},\qquad \tilde{G}_{\mu\nu}\triangleq\tilde{\delta}_{\alpha\beta}\tilde{B}_{\mu}^{\alpha}\tilde{B}_{\nu}^{\beta},$$

$$(d\tilde{x}^{\tau})^2=(dx^0)^2-\sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2=\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}d\tilde{x}^{\mu}d\tilde{x}^{\nu}=\tilde{H}_{\alpha\beta}d\tilde{\xi}^{\alpha}d\tilde{\xi}^{\beta},\qquad \tilde{H}_{\alpha\beta}\triangleq\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}\tilde{C}_{\alpha}^{\mu}\tilde{C}_{\beta}^{\nu},$$

易知 $\tilde{g}$ 是正交的当且仅当 $d\tilde{\xi}^{\tau}=d\tilde{x}^{\tau}$，即 $\tilde{G}_{\tau\tau}\triangleq\tilde{B}_{\tau}^{\tau}\tilde{B}_{\tau}^{\tau}=1$，只有在这种情况下我们才能将 $d\tilde{\xi}^{\tau}$ 和 $d\tilde{x}^{\tau}$ 统一记为 $d\tau$。否则，我们应当意识到 $d\tilde{\xi}^{\tau}$ 和 $d\tilde{x}^{\tau}$ 在非平凡引力场中的区别。不论 $\tilde{g}$ 是不是惯性系、有没有非平凡引力场，$(d\tilde{\xi}^{\tau})^2=(d\xi^0)^2-\sum\limits_{s=1}^{3}(d\xi^s)^2$ 和 $(d\tilde{x}^{\tau})^2=(dx^0)^2-\sum\limits_{i=1}^{3}(dx^i)^2$ 在各自的坐标系中都是恒成立的。

■ **注记 4.2.2**：第 3.3 节的演化引理用闵氏坐标可表示为：

（1）如果 $\frac{d}{d\tilde{t}}\cong\frac{d}{d\tilde{t}_L}$ 且 $d\tilde{f}\simeq d\tilde{f}_L$，那么 $\left\langle\frac{d}{d\tilde{t}},d\tilde{f}\right\rangle=\left\langle\frac{d}{d\tilde{t}_L},d\tilde{f}_L\right\rangle$。

（2）以下结论成立：

$$w^{\mu}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{\mu}}\cong w^{\tau}\frac{d}{d\tilde{x}^{\tau}}\Leftrightarrow\ w^{\mu}=w^{\tau}\tilde{\varepsilon}_{\tau}^{\mu},\qquad \bar{w}_{\mu}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_{\mu}}\cong\bar{w}_{\tau}\frac{d}{d\tilde{x}_{\tau}}\Leftrightarrow\ \bar{w}_{\mu}=\bar{w}_{\tau}\tilde{\bar{\varepsilon}}_{\mu}^{\tau},$$

$$w_{\mu}d\tilde{x}^{\mu}\simeq w_{\tau}d\tilde{x}^{\tau}\ \ \Leftrightarrow\ \tilde{\varepsilon}_{\tau}^{\mu}w_{\mu}=w_{\tau},\qquad \bar{w}^{\mu}d\tilde{x}_{\mu}\simeq\bar{w}^{\tau}d\tilde{x}_{\tau}\ \ \Leftrightarrow\ \tilde{\bar{\varepsilon}}_{\mu}^{\tau}\bar{w}^{\mu}=\bar{w}^{\tau}.$$

4.3 经典时空演化的仿射连络表示

设 $\tilde{D}$ 是 $(\tilde{M},\tilde{\mathcal{G}})$ 上的全连络，并记 $\tilde{t}_{L;\tau}\triangleq\tilde{t}_{;\sigma}\tilde{\varepsilon}_{\tau}^{\sigma}$，那么第 3.4 节的绝对微分和梯度在 $\tilde{M}$ 上用闵氏坐标可以表述为

$$\tilde{D}\tilde{t}\triangleq\tilde{t}_{;\sigma}d\tilde{x}^{\sigma},\ \ \tilde{D}_L\tilde{t}_L\triangleq\tilde{t}_{L;\tau}d\tilde{x}^{\tau},$$

$$\tilde{\nabla}\tilde{t}\triangleq\tilde{t}_{;\sigma}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_{\sigma}},\ \ \tilde{\nabla}_L\tilde{t}_L\triangleq\tilde{t}_{L;\tau}\frac{d}{d\tilde{x}_{\tau}}.$$

显然，$\tilde{D}\tilde{t}\simeq\tilde{D}_L\tilde{t}_L$ 当且仅当 L 是任意的路径。$\tilde{\nabla}\tilde{t}\cong\tilde{\nabla}_L\tilde{t}_L$ 当且仅当 L 是梯度线。

■ **定义 4.3.1**：类似于第 3.6 节，设 $\tilde{\mathcal{F}}$ 的荷 $\tilde{\rho}$ 在 $(\tilde{M},\tilde{\mathcal{G}})$ 上演化，那么有以下定义：

（1）将 $\tilde{m}^{\tau}\triangleq\tilde{\rho}^{;\tau}$ 和 $\tilde{m}_{\tau}\triangleq\tilde{\rho}_{;\tau}$ 称为 $\tilde{\rho}$ 的**静质量**。

（2）将 $\tilde{p}^{\mu}\triangleq-\tilde{\rho}^{;\mu}$ 和 $\tilde{p}_{\mu}\triangleq-\tilde{\rho}_{;\mu}$ 称为 $\tilde{\rho}$ 的**能量动量**，$\tilde{E}^0\triangleq\tilde{\rho}^{;0}$ 和 $\tilde{E}_0\triangleq\tilde{\rho}_{;0}$ 称为 $\tilde{\rho}$ 的**能量**。

（3）将 $\tilde{M}^{\tau}\triangleq\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{x}_{\tau}}$ 和 $\tilde{M}_{\tau}\triangleq\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{x}^{\tau}}$ 称为 $\tilde{\rho}$ 的**正则静质量**。

（4）将 $\tilde{P}^{\mu}\triangleq-\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{x}_{\mu}}$ 和 $\tilde{P}_{\mu}\triangleq-\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{x}^{\mu}}$ 称为 $\tilde{\rho}$ 的**正则能量动量**，$\tilde{H}^0\triangleq\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{x}_0}$ 和 $\tilde{H}_0\triangleq\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{x}^0}$ 称为 $\tilde{\rho}$ 的**正则能量**。

■ **论述 4.3.1**：类似于命题 3.6.1 ，$\forall p\in\tilde{M}$，当且仅当 $[L_p]=\tilde{\nabla}\tilde{\rho}|_p$ 时，方向导数为

$$\left\langle\tilde{m}_{\tau}\frac{d}{d\tilde{x}_{\tau}},\tilde{m}_{\tau}d\tilde{x}^{\tau}\right\rangle=\left\langle\tilde{p}_{\mu}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_{\mu}},\tilde{p}_{\mu}d\tilde{x}^{\mu}\right\rangle,$$

也就是 $\tilde{G}^{\tau\tau}\tilde{m}_{\tau}\tilde{m}_{\tau}=\tilde{G}^{\mu\nu}\tilde{p}_{\mu}\tilde{p}_{\nu}$，或

$$\tilde{m}_{\tau}\tilde{m}^{\tau}=\tilde{p}_{\mu}\tilde{p}^{\mu},$$

此即能量动量方程的仿射连络表示。

类似于命题 3.6.2 ，由演化引理，$\forall p \in \tilde{M}$ 当且仅当 $[L_p] = \tilde{\nabla}\tilde{\rho}|_p$ 时有 $\tilde{p}_\mu = -\tilde{m}_\tau \frac{d\tilde{x}_\mu}{d\tilde{x}_\tau}$ ，即 $\tilde{E}_0 = \tilde{m}_\tau \frac{d\tilde{x}_0}{d\tilde{x}_\tau} = \tilde{m}_\tau \frac{dx_0}{dx_\tau}$ 且 $\tilde{p}_i = -\tilde{m}_\tau \frac{d\tilde{x}_i}{d\tilde{x}_\tau} = \tilde{m}_\tau \frac{-d\tilde{x}_i}{d\tilde{x}_\tau} = \tilde{m}_\tau \frac{dx_i}{dx_\tau} = \tilde{E}_0 \frac{dx_i}{dx_0}$。这也可看作 $p = mv$ 的起源。

类似于注记 3.6.2 ，记

$$[\tilde{\rho}\tilde{\Gamma}_\omega] \triangleq \frac{\partial \tilde{\rho}_{\mu\nu}}{\partial \tilde{x}^\omega} - \tilde{\rho}_{\mu\nu;\omega} = \tilde{\rho}_{\mu\chi}\tilde{\Gamma}^\chi_{\nu\omega} + \tilde{\rho}_{\chi\nu}\tilde{\Gamma}^\chi_{\mu\omega}, \qquad [\tilde{\rho}\tilde{R}_{\rho\sigma}] \triangleq \tilde{\rho}_{\mu\chi}\tilde{R}^\chi_{\nu\rho\sigma} + \tilde{\rho}_{\chi\nu}\tilde{R}^\chi_{\mu\rho\sigma}.$$

那么与注记 3.6.2 同理，基于定义 4.3.1 ，就能严格地得到

$$\tilde{f}_\rho \triangleq \tilde{p}_{\rho;\tau} = \tilde{m}_{\tau;\rho} - \tilde{p}_\sigma \tilde{\varepsilon}^\sigma_{\tau;\rho} + [\tilde{\rho}\tilde{R}_{\rho\sigma}]\tilde{\varepsilon}^\sigma_\tau. \tag{56}$$

在质点模型中，$\tilde{m}_{\tau;\rho}$ 和 $\tilde{\varepsilon}^\sigma_{\tau;\rho}$ 是没有意义的，(56) 式就会过渡到

$$\tilde{f}_\rho = [\tilde{\rho}\tilde{R}_{\rho\sigma}]\tilde{\varepsilon}^\sigma_\tau.$$

这就是相互作用力（例如电动力学的 Lorentz 力 $\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$ 或 $f_\rho = j^\sigma F_{\rho\sigma}$ ）的仿射连络表示。

类似于定义 3.6.2 ，设 $\tilde{\mathcal{P}}(b,a)$ 是 $\tilde{M}$ 上起于点 a 且终于点 b 的路径的全体。又设 $L \in \tilde{\mathcal{P}}(b,a)$ ，且演化参数 $\tilde{x}^\tau$ 满足 $\tau_a \triangleq \tilde{x}^\tau(a) < \tilde{x}^\tau(b) \triangleq \tau_b$。闵氏坐标中的作用量的仿射连络表示为

$$\tilde{\mathfrak{s}}(L) \triangleq \int_L \tilde{D}\tilde{\rho} = \int_L \tilde{p}_\mu d\tilde{x}^\mu = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \tilde{m}_\tau d\tilde{x}^\tau, \qquad \tilde{s}(L) \triangleq \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left(\gamma^\mu \tilde{\rho}_{;\mu} + \tilde{m}_\tau\right) d\tilde{x}^\tau. \tag{57}$$

更多的解释见注记 4.4.1 。

4.4 Dirac 方程的仿射连络表示

■ **论述 4.4.1**：定义 Dirac 代数 γ^μ 和 γ^α，它们满足

$$\gamma^\mu = \tilde{C}^\mu_\alpha \gamma^\alpha, \qquad \gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha = 2\tilde{\delta}^{\alpha\beta}, \qquad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\tilde{G}^{\mu\nu}.$$

设 $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{G}})$ 是正交的，根据注记 4.2.1 ，$\tilde{G}_{\tau\tau} = 1$。根据论述 4.3.1 ，在 $\tilde{\rho} \triangleq \tilde{\rho}_{\omega\nu}$ 的梯度方向上有

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{;\mu}\tilde{\rho}^{;\mu} = \tilde{\rho}_{;\tau}\tilde{\rho}^{;\tau} &\Leftrightarrow \tilde{G}^{\mu\nu}\tilde{\rho}_{;\mu}\tilde{\rho}_{;\nu} = \tilde{m}_\tau^2 \\
&\Leftrightarrow (\gamma^\mu\tilde{\rho}_{;\mu})(\gamma^\nu\tilde{\rho}_{;\nu}) + (\gamma^\nu\tilde{\rho}_{;\nu})(\gamma^\mu\tilde{\rho}_{;\mu}) = 2\tilde{m}_\tau^2 \\
&\Leftrightarrow (\gamma^\mu\tilde{\rho}_{;\mu})(\gamma^\nu\tilde{\rho}_{;\nu}) = \tilde{m}_\tau^2 \\
&\Leftrightarrow (\gamma^\mu\tilde{\rho}_{;\mu})^2 = \tilde{m}_\tau^2.
\end{aligned}$$

不失一般性取 $\gamma^\mu\tilde{\rho}_{;\mu} = \tilde{m}_\tau$ ，即

$$\gamma^\mu\tilde{\rho}_{\omega\nu;\mu} = \tilde{m}_{\omega\nu\tau}\ . \tag{58}$$

接下来记

$$[g\tilde{\Gamma}_\mu]^{\omega\nu} \triangleq \sum_\sigma \tilde{G}^{\nu\nu'}\tilde{\Gamma}_{\nu'\sigma\mu} + \sum_\kappa \tilde{G}^{\omega\omega'}\tilde{\Gamma}_{\omega'\kappa\mu}\,, \qquad \tilde{D}_\mu^{\omega\nu} \triangleq \partial_\mu - [g\tilde{\Gamma}_\mu]^{\omega\nu}\,.$$

从 (58) 式可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{\omega,\nu}\gamma^\mu\tilde{\rho}_{\omega\nu;\mu} = \sum_{\omega,\nu}\tilde{m}_{\omega\nu\tau} \;&\Leftrightarrow\; \sum_{\omega,\nu}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\rho_{\omega\nu} - \tilde{\rho}_{\omega\chi}\tilde{\Gamma}^\chi_{\nu\mu} - \tilde{\rho}_{\chi\nu}\tilde{\Gamma}^\chi_{\omega\mu}\right) = \sum_{\omega,\nu}\tilde{m}_{\omega\nu\tau}\\ &\Leftrightarrow\; \sum_{\omega,\nu}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\rho_{\omega\nu} - \tilde{\rho}_{\omega\nu}\sum_\sigma\tilde{\Gamma}^\nu_{\sigma\mu} - \tilde{\rho}_{\omega\nu}\sum_\kappa\tilde{\Gamma}^\omega_{\kappa\mu}\right) = \sum_{\omega,\nu}\tilde{m}_{\omega\nu\tau}\\ &\Leftrightarrow\; \sum_{\omega,\nu}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\rho_{\omega\nu} - \tilde{\rho}_{\omega\nu}[g\tilde{\Gamma}_\mu]^{\omega\nu}\right) = \sum_{\omega,\nu}\tilde{m}_{\omega\nu\tau}\\ &\Leftrightarrow\; \sum_{\omega,\nu}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - [g\tilde{\Gamma}_\mu]^{\omega\nu}\right)\tilde{\rho}_{\omega\nu} = \sum_{\omega,\nu}\tilde{m}_{\omega\nu\tau}\,,\end{aligned} \tag{59}$$

此即

$$\sum_{\omega,\nu}\gamma^\mu\tilde{D}_\mu^{\omega\nu}\tilde{\rho}_{\omega\nu} = \sum_{\omega,\nu}\tilde{m}_{\omega\nu\tau}\,, \qquad \tilde{D}_\mu^{\omega\nu} \triangleq \partial_\mu - [g\tilde{\Gamma}_\mu]^{\omega\nu}\,. \tag{60}$$

我们把实值的 (58) 和 (60) 式都称为**仿射 Dirac 方程**。

■ **论述 4.4.2**：接下来构造仿射 Dirac 方程的一种复值表示。限制在 $(\tilde{U},\tilde{x}^\mu)$ 上，荷 $\tilde{\rho}_{\omega\nu} = \tilde{\rho}_{\omega\nu}(\tilde{x}^\mu)$ 是关于坐标 $(\tilde{x}^\mu) \triangleq (\tilde{x}^0,\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)$ 的函数，设

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\omega\nu}(\tilde{x}^0) \triangleq \int_{(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)}\tilde{\rho}_{\omega\nu}(\tilde{x}^\mu)d^3\tilde{x}.$$

设 $(\tilde{U},\tilde{x}^\mu)$ 上的函数 $f_{\omega\nu} = f_{\omega\nu}(\tilde{x}^\mu)$ 满足

$$\tilde{\rho}_{\omega\nu} = (f_{\omega\nu})^2\tilde{\mathrm{P}}_{\omega\nu}, \qquad \int_{(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)}(f_{\omega\nu})^2d^3\tilde{x} = 1, \qquad \varepsilon^\mu_\tau\frac{\partial f_{\omega\nu}}{\partial\tilde{x}^\mu} = 0, \qquad \gamma^\mu\frac{\partial f_{\omega\nu}}{\partial\tilde{x}^\mu} = 0.$$

我们用以下方式来定义 $\psi_{\omega\nu}$ 和 $\tilde{\mathbb{M}}_{\omega\nu\tau}$。

$$\tilde{y}_{\omega\nu} \triangleq \int_L d\tilde{\rho}_{\omega\nu} = \int_L\frac{d\tilde{\rho}_{\omega\nu}}{d\tilde{x}^\tau}d\tilde{x}^\tau = \int_L\left(\frac{d(f^2_{\omega\nu})}{d\tilde{x}^\tau}\tilde{\mathrm{P}}_{\omega\nu} + f^2_{\omega\nu}\frac{d\tilde{\mathrm{P}}_{\omega\nu}}{d\tilde{x}^\tau}\right)d\tilde{x}^\tau = f^2_{\omega\nu}\int_L\frac{d\tilde{\mathrm{P}}_{\omega\nu}}{d\tilde{x}^\tau}d\tilde{x}^\tau \triangleq f^2_{\omega\nu}\tilde{Y}_{\omega\nu}\,,$$

$$\psi_{\omega\nu} \triangleq f_{\omega\nu}e^{i\tilde{Y}_{\omega\nu}}, \qquad \tilde{m}_{\omega\nu\tau} \triangleq \tilde{\rho}_{\omega\nu;\tau} = (f^2_{\omega\nu})_{,\tau}\tilde{\mathrm{P}}_{\omega\nu} + f^2_{\omega\nu}\tilde{\mathrm{P}}_{\omega\nu;\tau} = f^2_{\omega\nu}\tilde{\mathrm{P}}_{\omega\nu;\tau} \triangleq f^2_{\omega\nu}\tilde{\mathbb{M}}_{\omega\nu\tau}\,.$$

在 QFT 的传播子中，费米子的路径积分 $\int e^{iS}\mathcal{D}\psi$ 中的 S 通常采用

$$-\int\left(i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}\tilde{\mathbb{M}}_\tau\psi\right)d^4\tilde{x}$$

的形式，其中 S 和 $d^4\tilde{x}$ 都是协变的。我们相信外部空间积分 $\int_{(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)}d^3\tilde{x}$ 对于演化来说并不是本质性的，所以为了简单起见，我们不考虑外部空间部分 $\int_{(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)}d^3\tilde{x}$，而只考虑演化部分 $\int_L d\tilde{x}^0$。同时，为了保持协变性，须将 $\int_L d\tilde{x}^0$ 替换为 $\int_L d\tilde{x}^\tau$。这样一来，在规范场的仿射连络表示中，我们将考虑

$$-\int_L\left(i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}\tilde{\mathbb{M}}_\tau\psi\right)d\tilde{x}^\tau$$

形式的作用量。具体来说，记

$$\tilde{D}_{\omega\nu\mu} \triangleq \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\mu}} - i[\tilde{\mathrm{P}}\tilde{\Gamma}_{\mu}]_{\omega\nu}, \qquad [\tilde{\mathrm{P}}\tilde{\Gamma}_{\mu}]_{\omega\nu} \triangleq \sum_{\sigma} \tilde{\mathrm{P}}_{\omega\nu}\tilde{\Gamma}^{\nu}_{\sigma\mu} + \sum_{\kappa} \tilde{\mathrm{P}}_{\omega\nu}\tilde{\Gamma}^{\omega}_{\kappa\mu}.$$

由 (57) 式有

$$\tilde{s}_{\omega\nu}(L) \triangleq \int_L \left(\gamma^{\mu}\tilde{\rho}_{\omega\nu;\mu} + \tilde{m}_{\omega\nu\tau}\right) d\tilde{x}^{\tau}.$$

又由 (59) 式知 $\sum_{\omega,\nu}\gamma^{\mu}\tilde{\rho}_{\omega\nu;\mu} = \sum_{\omega,\nu}\gamma^{\mu}\tilde{D}^{\omega\nu}_{\mu}\tilde{\rho}_{\omega\nu}$。那么就有

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_{\tilde{\rho}}(L) &\triangleq \sum_{\omega,\nu}\tilde{s}_{\omega\nu}(L) = \int_L \sum_{\omega,\nu}(\gamma^{\mu}\tilde{\rho}_{\omega\nu;\mu} + \tilde{m}_{\omega\nu\tau})d\tilde{x}^{\tau} = \int_L \sum_{\omega,\nu}\left(\gamma^{\mu}\tilde{D}^{\omega\nu}_{\mu}\tilde{\rho}_{\omega\nu} + \tilde{m}_{\omega\nu\tau}\right) d\tilde{x}^{\tau} \\
&= \int_L \sum_{\omega,\nu}\left(\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}\tilde{\rho}_{\omega\nu} - [g\tilde{\Gamma}_{\mu}]^{\omega\nu}\tilde{\rho}_{\omega\nu}\right) + \tilde{m}_{\omega\nu\tau}\right) d\tilde{x}^{\tau} \\
&= \int_L \sum_{\omega,\nu}\left(\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}\tilde{y}_{\omega\nu} - [g\tilde{\Gamma}_{\mu}]^{\omega\nu}\tilde{\rho}_{\omega\nu}\right) + \tilde{m}_{\omega\nu\tau}\right) d\tilde{x}^{\tau} \\
&= \int_L \sum_{\omega,\nu}\left(\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}(f^2_{\omega\nu}\tilde{Y}_{\omega\nu}) - [g\tilde{\Gamma}_{\mu}]^{\omega\nu} f^2_{\omega\nu}\tilde{\mathrm{P}}_{\omega\nu}\right) + f^2_{\omega\nu}\tilde{\mathbb{M}}_{\omega\nu\tau}\right) d\tilde{x}^{\tau} \\
&= \int_L \sum_{\omega,\nu}\left(\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}\tilde{Y}_{\omega\nu} - [\tilde{\mathrm{P}}\tilde{\Gamma}_{\mu}]_{\omega\nu}\right) f^2_{\omega\nu} + f^2_{\omega\nu}\tilde{\mathbb{M}}_{\omega\nu\tau}\right) d\tilde{x}^{\tau} \\
&= \int_L \sum_{\omega,\nu}\left(f_{\omega\nu}e^{-i\tilde{Y}_{\omega\nu}}\gamma^{\mu}\left(f_{\omega\nu}e^{i\tilde{Y}_{\omega\nu}}\partial_{\mu}\tilde{Y}_{\omega\nu} - [\tilde{\mathrm{P}}\tilde{\Gamma}_{\mu}]_{\omega\nu}f_{\omega\nu}e^{i\tilde{Y}_{\omega\nu}}\right) + f_{\omega\nu}e^{-i\tilde{Y}_{\omega\nu}}\tilde{\mathbb{M}}_{\omega\nu\tau}f_{\omega\nu}e^{i\tilde{Y}_{\omega\nu}}\right) d\tilde{x}^{\tau} \qquad (61) \\
&= \int_L \sum_{\omega,\nu}\left(-\bar{\psi}_{\omega\nu}i\gamma^{\mu}\left(e^{i\tilde{Y}_{\omega\nu}}\partial_{\mu}f_{\omega\nu} + f_{\omega\nu}e^{i\tilde{Y}_{\omega\nu}}i\partial_{\mu}\tilde{Y}_{\omega\nu} - i[\tilde{\mathrm{P}}\tilde{\Gamma}_{\mu}]_{\omega\nu}\psi_{\omega\nu}\right) + \bar{\psi}_{\omega\nu}\tilde{\mathbb{M}}_{\omega\nu\tau}\psi_{\omega\nu}\right) d\tilde{x}^{\tau} \\
&= \int_L \sum_{\omega,\nu}\left(-\bar{\psi}_{\omega\nu}i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}(f_{\omega\nu}e^{i\tilde{Y}_{\omega\nu}}) - i[\tilde{\mathrm{P}}\tilde{\Gamma}_{\mu}]_{\omega\nu}\psi_{\omega\nu}\right) + \bar{\psi}_{\omega\nu}\tilde{\mathbb{M}}_{\omega\nu\tau}\psi_{\omega\nu}\right) d\tilde{x}^{\tau} \\
&= \int_L \sum_{\omega,\nu}\left(-\bar{\psi}_{\omega\nu}i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} - i[\tilde{\mathrm{P}}\tilde{\Gamma}_{\mu}]_{\omega\nu}\right)\psi_{\omega\nu} + \bar{\psi}_{\omega\nu}\tilde{\mathbb{M}}_{\omega\nu\tau}\psi_{\omega\nu}\right) d\tilde{x}^{\tau} \\
&= \int_L \sum_{\omega,\nu}\left(-\bar{\psi}_{\omega\nu}i\gamma^{\mu}\tilde{D}_{\omega\nu\mu}\psi_{\omega\nu} + \bar{\psi}_{\omega\nu}\tilde{\mathbb{M}}_{\omega\nu\tau}\psi_{\omega\nu}\right) d\tilde{x}^{\tau} \\
&= -\int_L \sum_{\omega,\nu}\bar{\psi}_{\omega\nu}\left(i\gamma^{\mu}\tilde{D}_{\omega\nu\mu} - \tilde{\mathbb{M}}_{\omega\nu\tau}\right)\psi_{\omega\nu}d\tilde{x}^{\tau}.
\end{aligned}$$

这样我们就得到了 $\tilde{\rho}_{\omega\nu}$ 的梯度方向的一种复值表示。

■ **注记 4.4.1**：由以上论述可知，在 $\rho_{\omega\nu}$ 的梯度方向上有

$$-\sum_{\omega,\nu}\bar{\psi}_{\omega\nu}i\gamma^{\mu}\tilde{D}_{\omega\nu\mu}\psi_{\omega\nu}d\tilde{x}^{\tau} = \sum_{\omega,\nu}\tilde{D}\tilde{\rho}_{\omega\nu}.$$

这说明，在规范场的仿射连络表示中，定义 3.6.2 和注记 3.6.1 中的 $s(L)$ 和 $\tilde{s}(L)$ 确实适合通过 $e^{is(L)}$ 和 $e^{i\tilde{s}(L)}$ 来构造传播子。因此，论述 3.9.3 的想法是合理的。

4.5 从经典时空回到全维度空间

■ **论述 4.5.1**：现在有一个问题，$(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ 和 $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{G}})$ 无法完整地反映 $(M, \mathcal{F})$ 和 $(M, \mathcal{G})$ 的内部空间几何性质。具体来说：

上节我们讨论了 $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{G}})$ 上的仿射 Dirac 方程 $\gamma^\mu \tilde{\rho}_{\omega\nu;\mu} = \tilde{m}_{\omega\nu\tau}$。类似于第 3.5 节，在 $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ 上有仿射杨-Mills 方程 $\tilde{K}^{\mu}_{\nu\rho\sigma}{}^{:\rho} = \tilde{\rho}^{\mu}_{\nu}\gamma_\sigma$。假设没有引力场，那么非零的方程只有

$$\gamma^\mu \tilde{\rho}_{00;\mu} = \tilde{m}_{00\tau}, \qquad \tilde{K}^{0}_{0\rho\sigma}{}^{:\rho} = \tilde{\rho}^{0}_{0}\gamma_\sigma\ .$$

而 $(M, \mathcal{F})$ 有多个内部空间荷

$$\rho_{mn},\ \ (m, n = 4, 5, \cdots, \mathfrak{D}).$$

我们意图用这些 ρ_{mn} 来描述轻子和强子。但是，通过经典时空的封装，$(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ 只剩下一个内部空间荷 $\tilde{\rho}_{00}$，不够用了。让这一个实值场函数 $\tilde{\rho}_{00}$ 去描述那么多种轻子和强子是不可能的。

在不放弃 $(1+3)$ 维时空的前提下，要想描述规范场，一种方法就是在复值场函数 ψ 的相位 $e^{iT_a\theta^a}$ 上，以非空间坐标的抽象自由度来描述。这种方法有效，但不自然。一个理论对外部空间采用坐标表示，而对内部空间却采用非坐标表示，这是不能令人满意的。

逻辑上更加自然的方式要求必须放弃 $(1+3)$ 维时空 $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ 和 $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{G}})$ 的框架，把内部空间和外部空间放在一起用统一的空间标架来描述统一的几何。在 $(M, \mathcal{F})$ 和 $(M, \mathcal{G})$ 上有足够多的实值场函数 ρ_{mn} 来描述轻子和强子，也有足够多的内部仿射连络分量 $[mnP]$ 来描述规范势。

因此只有在全维度的 $(M, \mathcal{F})$ 和 $(M, \mathcal{G})$ 上，才能发挥出规范场的仿射连络表示的全部优势，从而给出规范场几何性质的全部细节。所以，关于经典时空 $\tilde{M}$ 的讨论到此为止，接下来把着眼点放在全维度流形 M 上。

■ **论述 4.5.2**：在 M 上，由 $\Gamma_{MNP} = \frac{1}{2}\left([MNP] + \{MNP\}\right)$，$[MNP] = \delta_{AD} B^D_M \left(\frac{\partial B^A_N}{\partial x^P} + \binom{A}{BP} B^B_N\right)$ 和 $G_{MN} = \delta_{AB} B^A_M B^B_N$ 知，规范场与引力场都可以用参考系中的空间标架 B^A_M 和 C^M_A 来描述。参考系是规范场和引力场的共同起源。参考系变换下的不变性是规范协变性和广义协变性的共同起源。

我们用 $[MNP]$ 的 $m, n \in \{4, 5, \cdots, \mathfrak{D}\}$ 的分量 $[mnP]$ 描述电磁、弱和强相互作用场等典型规范场的规范势，用 ρ_{MN} 的 $m, n \in \{4, 5, \cdots, \mathfrak{D}\}$ 的分量 ρ_{mn} 描述轻子和强子的荷，而 ρ_{MN} 和 $[MNP]$ 的其余分量的物理意义目前还不太明确，也许可以用于描述暗物质及其相互作用。

在正交的 $(M, \mathcal{G})$ 和 $(M, \mathcal{F})$ 上有全维度的场方程，即仿射 Dirac 方程和仿射杨-Mills 方程

$$\gamma^P \rho_{MN;P} = \rho_{MN;0}, \qquad K^{M}_{NPQ}{}^{:P} = \rho^{M}_{N}\gamma_Q, \tag{62}$$

它们分别体现了实际（on-shell）演化方向 $\nabla\rho$ 和 ∇t。其量子演化由定义 3.9.5 或论述 3.9.3 中的传播子描述。

■ **论述 4.5.3**：在正交的 $(M,\mathcal{G})$ 上，(61) 式会表现为全维度的作用量

$$s_\rho(L)=\int_L\sum_{M,N}\left(\gamma^P\rho_{MN;P}+\varepsilon_0^P\rho_{MN;P}\right)dx^0=-i\int_L\sum_{M,N}\bar{\psi}_{MN}\left(\gamma^P D_{MNP}+\varepsilon_0^P D_{MNP}\right)\psi_{MN}dx^0. \tag{63}$$

当且仅当 $L_k:g\to g'$ 是正交变换时，L_k 把 $s_\rho(L)$ 变为

$$s'_\rho(L)=\int_L\sum_{M,N}\left(\gamma^{P'}\rho_{MN;P'}+\varepsilon_{0'}^{P'}\rho_{MN;P'}\right)dx^{0'}=-i\int_L\sum_{M,N}\bar{\psi}'_{MN}\left(\gamma^{P'}D'_{MNP'}+\varepsilon_{0'}^{P'}D'_{MNP'}\right)\psi'_{MN}dx^{0'},$$

其中 ρ_{MN} 由参考系 $\mathfrak{f}\circ f$ 确定，而不是由 $\mathfrak{g}\circ g$ 确定，所以 ρ_{MN} 并不随 $L_k:g\to g'$ 而变。我们看到，在规范场的仿射连络表示中，规范变换 $\psi\mapsto\psi'$ 和 $D\mapsto D'$ 本质上就归结为参考系变换 L_k。

注记 1：对于一般的 $(M,\mathcal{G})$ 来说，$\mathcal{G}$ 不一定正交，这时相应的作用量应为

$$s_{MN}(L)=\int_L\left(B_0^0\gamma^P\rho_{MN;P}+\varepsilon_0^P\rho_{MN;P}\right)dx^0.$$

在这种一般的情况下，论述 3.9.3 中的方法和定义 3.6.2 也是可用和有效的，在那里我们取

$$s_{MN}(L)=\int_L D\rho_{MN}.$$

注记 2：我们看到，作用量的实值表示比复值表示更简洁。因此对于场函数、场方程和作用量来说，采用实值表示更为方便。

在下面几节中，我们将用 $[MNP]$ 给出电磁、弱和强相互作用场的仿射连络表示，并采用实值表示 $\rho_{MN;P}$ 来讨论规范场与基本粒子的相互作用，它们基于以下定义。

■ **定义 4.5.1**：设 $M=P\times N$，$r\triangleq dimP=3$，$\mathfrak{D}\triangleq dimM=5$ or 6 or 8。考虑 (17) 式所定义的 $\mathcal{F}=\mathfrak{f}\circ f$ 和 $\mathcal{G}=\mathfrak{g}\circ g$，即 $\forall p\in M$，

$$(U,\alpha^{A'})\xrightarrow{\mathfrak{f}(p)}(U,\xi^A)\xrightarrow{f(p)}(U,x^M)\xleftarrow{g(p)}(U,\zeta^A)\xleftarrow{\mathfrak{g}(p)}(U,\beta^{A'})$$

并且进一步设

$$\begin{aligned} &f(p):\ \ \xi^a=\xi^a(x^m),\quad \xi^s=\delta_i^s x^i\,; &&\mathfrak{f}(p):\ \ \alpha^{a'}=\alpha^{a'}(\xi^a),\quad \alpha^{s'}=\delta_s^{s'}\xi^s\,;\\ &g(p):\ \ \zeta^a=\zeta^a(x^m),\quad \zeta^s=\delta_i^s x^i\,; &&\mathfrak{g}(p):\ \ \beta^{a'}=\beta^{a'}(\zeta^a),\quad \beta^{s'}=\delta_s^{s'}\zeta^s\,; \end{aligned} \tag{64}$$

（$s',s,i=1,2,3$；$a',a,m,n=4,5,\cdots,\mathfrak{D}$）且 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 都满足

$$\text{(i) } G_{mn}=const,\quad \text{(ii) 当 } m\neq n \text{ 时}, G_{mn}=0. \tag{65}$$

在以上极端简化的情况下，我们用 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 来展示不含引力的电磁、弱、强相互作用。

5 电弱相互作用规范场的仿射连络表示

■ 定义 5.1：设 $(M,\mathcal{F})$ 和 $(M,\mathcal{G})$ 符合定义 4.5.1 。设 $\mathfrak{D}=r+2=5$ 且 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 都满足 $G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}=G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}$，则 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 可描述电弱相互作用。

■ 命题 5.1：设 $(M,\mathcal{F})$ 的全连络是 Γ^M_{NP} 和 Γ_{MNP}，$(M,\mathcal{F})$ 的曲率系数是 K^M_{NPQ} 和 K_{MNPQ}。记

$$\begin{cases} B_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}\right), \\ A^3_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{PQ} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(K_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}PQ}+K_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)PQ}\right), \\ F^3_{PQ} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(K_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}PQ}-K_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)PQ}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^1_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}+\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\right), \\ A^2_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}-\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} F^1_{PQ} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(K_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}PQ}+K_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)PQ}\right), \\ F^2_{PQ} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(K_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}PQ}-K_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)PQ}\right). \end{cases}$$

再记 $g \triangleq \sqrt{\left(G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\right)^2+\left(G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right)^2}$，那么下列各式自动成立:

$$\begin{aligned} B_{PQ} &= \frac{\partial B_Q}{\partial x^P}-\frac{\partial B_P}{\partial x^Q}, \\ F^3_{PQ} &= \frac{\partial A^3_Q}{\partial x^P}-\frac{\partial A^3_P}{\partial x^Q}+g\left(A^1_PA^2_Q-A^2_PA^1_Q\right), \\ F^1_{PQ} &= \frac{\partial A^1_Q}{\partial x^P}-\frac{\partial A^1_P}{\partial x^Q}+g\left(A^2_PA^3_Q-A^3_PA^2_Q\right), \\ F^2_{PQ} &= \frac{\partial A^2_Q}{\partial x^P}-\frac{\partial A^2_P}{\partial x^Q}+g\left(A^1_PA^3_Q-A^3_PA^1_Q\right). \end{aligned}$$

证明：由 (64) 式得知 $(M,\mathfrak{f})$ 的半度规满足

$$(B_\mathfrak{f})^{s'}_a=0,\ \ (C_\mathfrak{f})^a_{s'}=0,\ \ (B_\mathfrak{f})^{a'}_s=0,\ \ (C_\mathfrak{f})^s_{a'}=0,\ \ (B_\mathfrak{f})^{s'}_s=\delta^{s'}_s,\ \ (C_\mathfrak{f})^s_{s'}=\delta^s_{s'}.$$

再计算 $\binom{A}{BC}_\mathfrak{f} \triangleq \frac{1}{2}(C_\mathfrak{f})^A_{A'}\left(\frac{\partial(B_\mathfrak{f})^{A'}_B}{\partial\xi^C}+\frac{\partial(B_\mathfrak{f})^{A'}_C}{\partial\xi^B}\right)$ 得到

$$\binom{s}{BC}_\mathfrak{f}=0,\quad \binom{a}{tu}_\mathfrak{f}=0,\quad \binom{a}{bC}_\mathfrak{f}\neq 0;\quad s,t,u=1,2,3;\quad a,b=4,5,\cdots,\mathfrak{D};\quad A,B,C=1,2,\cdots,\mathfrak{D}\,.$$

再次由 (64) 式得知 (M,f) 的半度规满足

$$B^s_m=0,\ \ C^m_s=0,\ \ B^a_i=0,\ \ C^i_a=0,\ \ B^s_i=\delta^s_i,\ \ C^i_s=\delta^i_s.$$

设 $s',t',i,j,k=1,2,3;\ a',b',m,n,p=4,5,\cdots,\mathfrak{D}$。计算 $(M,\mathcal{F})$ 的度规得到

$$\begin{cases} G_{ij}=\delta_{s't'}B^{s'}_iB^{t'}_j+\delta_{a'b'}B^{a'}_iB^{b'}_j=\delta_{s't'}\delta^{s'}_i\delta^{t'}_j=\delta_{ij}, \\ G_{in}=\delta_{s't'}B^{s'}_iB^{t'}_n+\delta_{a'b'}B^{a'}_iB^{b'}_n=0, \\ G_{mj}=\delta_{s't'}B^{s'}_mB^{t'}_j+\delta_{a'b'}B^{a'}_mB^{b'}_j=0, \\ G_{mn}=B^{\mathfrak{D}-1}_mB^{\mathfrak{D}-1}_n+B^{\mathfrak{D}}_mB^{\mathfrak{D}}_n=const, \end{cases} \qquad \begin{cases} G^{ij}=\delta^{s't'}C^i_{s'}C^j_{t'}=\delta^{s't'}\delta^i_{s'}\delta^j_{t'}=\delta^{ij}, \\ G^{in}=\delta^{s't'}C^i_{s'}C^n_{t'}=0, \\ G^{mj}=\delta^{s't'}C^m_{s'}C^j_{t'}=0, \\ G^{mn}=C^m_{\mathfrak{D}-1}C^n_{\mathfrak{D}-1}+C^m_{\mathfrak{D}}C^n_{\mathfrak{D}}=const. \end{cases}$$

计算 $\mathcal{F}$ 的全连络 $\Gamma^M_{NP}\triangleq\frac{1}{2}\left(\left[{M \atop NP}\right]+\left\{{M\atop NP}\right\}\right)=\frac{1}{2}\left(C^M_A\frac{\partial B^A_N}{\partial x^P}+C^M_A\left({A\atop BP}\right)_{\mathfrak{f}}B^B_N\right)$ 得到：

$$\begin{cases}\Gamma^i_{NP}=0,\\ \Gamma^m_{jk}=0,\\ \Gamma^m_{nP}=\dfrac{1}{2}\left(C^m_a\dfrac{\partial B^a_n}{\partial x^P}+C^m_a\left({a\atop bP}\right)_{\mathfrak{f}}B^b_n\right),\\ \Gamma^m_{Np}=\dfrac{1}{2}\left(C^m_a\dfrac{\partial B^a_N}{\partial x^p}+C^m_a\left({a\atop Bp}\right)_{\mathfrak{f}}B^B_N\right),\end{cases}\qquad \begin{cases}\Gamma_{iNP}=G_{iM'}\Gamma^{M'}_{NP}=G_{ii'}\Gamma^{i'}_{NP}=0,\\ \Gamma_{mjk}=G_{mM'}\Gamma^{M'}_{jk}=G_{mm'}\Gamma^{m'}_{jk}=0,\\ \Gamma_{mnP}=\dfrac{1}{2}\delta_{ab}B^b_m\left(\dfrac{\partial B^a_n}{\partial x^P}+\left({a\atop bP}\right)_{\mathfrak{f}}B^b_n\right),\\ \Gamma_{mNp}=\dfrac{1}{2}\delta_{ab}B^b_m\left(\dfrac{\partial B^a_N}{\partial x^p}+\left({a\atop Bp}\right)_{\mathfrak{f}}B^B_N\right).\end{cases}\tag{66}$$

计算 $\mathcal{F}$ 的曲率系数 $K^m_{nPQ}\triangleq\frac{\partial\Gamma^m_{nQ}}{\partial x^P}-\frac{\partial\Gamma^m_{nP}}{\partial x^Q}+\Gamma^m_{HP}\Gamma^H_{nQ}-\Gamma^H_{nP}\Gamma^m_{HQ}$ 和 $K_{mnPQ}\triangleq G_{mM'}K^{M'}_{nPQ}=G_{mm'}K^{m'}_{nPQ}$ 得到：

$$\begin{aligned}
K_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)PQ}&=\frac{\partial\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)Q}}{\partial x^P}-\frac{\partial\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}}{\partial x^Q}+G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)Q}-\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}Q}\right),\\
K_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)PQ}&=\frac{\partial\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)Q}}{\partial x^P}-\frac{\partial\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}}{\partial x^Q}+G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)Q}-\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}Q}\right)\\
&\qquad+G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)Q}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)Q}\right),\\
K_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}PQ}&=\frac{\partial\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}Q}}{\partial x^P}-\frac{\partial\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}}{\partial x^Q}+G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}Q}-\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}Q}\right)\\
&\qquad+G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}Q}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)Q}\right),\\
K_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}PQ}&=\frac{\partial\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}Q}}{\partial x^P}-\frac{\partial\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}}{\partial x^Q}+G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}Q}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)Q}\right).
\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}
B_{PQ}&\triangleq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(K_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}PQ}+K_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)PQ}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial\left(\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}Q}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)Q}\right)}{\partial x^P}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial\left(\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}\right)}{\partial x^Q}\\
&=\frac{\partial B_Q}{\partial x^P}-\frac{\partial B_P}{\partial x^Q}.\\
F^3_{PQ}&\triangleq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(K_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}PQ}-K_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)PQ}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}Q}}{\partial x^P}-\frac{\partial\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}}{\partial x^Q}+G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}Q}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)Q}\right)\right)\\
&-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)Q}}{\partial x^P}-\frac{\partial\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}}{\partial x^Q}+G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)Q}-\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}Q}\right)\right)\\
&=\frac{\partial A^3_Q}{\partial x^P}-\frac{\partial A^3_P}{\partial x^Q}+g\left(\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}Q}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)Q}\right)\\
&=\frac{\partial A^3_Q}{\partial x^P}-\frac{\partial A^3_P}{\partial x^Q}+g\left(A^1_PA^2_Q-A^2_PA^1_Q\right).
\end{aligned}$$

类似地也能算出 F^1_{PQ} 和 F^2_{PQ}。□

■ **注记 5.1**：将以上结论与 $U(1)\times SU(2)$ 主从理论比较就可以知道，这个命题说明参考系 $\mathcal{F}$ 确实可以描述弱电统一场。

下面的命题表明了仿射连络表示的一个优点，也就是说，仿射连络表示自动地蕴含了中微子的手征不对称性，而 $U(1)\times SU(2)$ 主丛连络表示却不能自动地蕴含它。

■ **定义 5.2**：根据定义 3.5.1 ，设上述参考系 $\mathcal{F}$ 的荷是 ρ_{mn}，其中 $m,n\in\{\mathfrak{D}-1,\mathfrak{D}\}=\{4,5\}$。我们将 $l\triangleq(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)},\ \rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}})^T$ 称为**带电轻子**，$\nu\triangleq(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)},\ \rho_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}})^T$ 称为**中微子**，l 和 ν 统一记为 L。将 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\,L$ 称为**左手轻子**，$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\,L$ 称为**右手轻子**，并且记

$$\begin{cases} l_L\triangleq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}+\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right), \\ l_R\triangleq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}-\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right), \end{cases}\quad \begin{cases} \nu_L\triangleq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)}+\rho_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}}\right), \\ \nu_R\triangleq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)}-\rho_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}}\right). \end{cases} \tag{67}$$

将 $(\Gamma_{\mathcal{G}})_{MNP}$ 简记为 Γ_{MNP}，在 $(M,\mathcal{G})$ 上定义

$$\begin{cases} Z_P\triangleq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}+\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}\right), \\ A_P\triangleq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}-\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}\right), \end{cases}\quad \begin{cases} W_P^1\triangleq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}+\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\right), \\ W_P^2\triangleq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}-\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\right), \end{cases} \tag{68}$$

将 A_P 称为**（仿射）电磁势**，Z_P、W_P^1 和 W_P^2 称为**（仿射）弱规范势**。

■ **命题 5.2**：当 $(M,\mathcal{G})$ 满足对称条件 $\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}=\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}$ 时，$\mathcal{F}$ 的几何性质 l 和 ν 在 $(M,\mathcal{G})$ 上满足：

$$\begin{cases} l_{L;P}=\partial_P l_L-gl_LZ_P-gl_RA_P-g\nu_LW_P^1\,, \\ \\ l_{R;P}=\partial_P l_R-gl_RZ_P-gl_LA_P\,, \\ \\ \nu_{L;P}=\partial_P\nu_L-g\nu_LZ_P-gl_LW_P^1\,, \\ \\ \nu_{R;P}=\partial_P\nu_R-g\nu_RZ_P\,. \end{cases} \tag{69}$$

证明：令 $H\in\{1,2,3,4,5\}$，$h\in\{4,5\}$。由 (66) 式可得到

$$\begin{aligned} \rho_{mn;P}&=\partial_P\rho_{mn}-\rho_{Hn}\Gamma^H_{mP}-\rho_{mH}\Gamma^H_{nP} \\ &=\partial_P\rho_{mn}-\rho_{hn}\Gamma^h_{mP}-\rho_{mh}\Gamma^h_{nP}. \end{aligned}$$

再由 (67) 和 (68) 式即得 (69) 式。□

■ **注记 5.2**：由以上命题我们看到，约束条件使得一般线性群 $GL(2,\mathbb{R})$ 破缺到了一个更小的群 S，即：

$$GL(2,\mathbb{R})\xrightarrow{G_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}=G_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}},\quad \Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}=\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}} S,$$

进而使轻子的手征不对称性在 (69) 式中自动地呈现了出来。

■ **注记 5.3**：命题 5.2 表明：

（1）在规范场的仿射连络表示中，耦合常数 g 具有几何意义，它事实上就是内部空间度规。在 $U(1)\times SU(2)$ 主丛连络表示中，耦合常数没有这样清晰的几何意义。

（2）在最基本的层面上，Z_P 和 A_P 的耦合常数是相等的，即

$$g_Z = g_A = g.$$

如果有一种介质，Z 玻色子和光子在其中运动，设 Z 场与介质有相互作用，但电磁场 A 与介质没有相互作用。那么我们有介质中的耦合常数

$$\tilde{g}_Z \neq g_A = g,$$

这样 Weinberg 角就出现了。

我们有相当的合理性可以认为 Higgs 玻色子就是零自旋中微子对，这是因为在拉氏量中，Higgs 玻色子只与 Z 场、W 场耦合，而不与电磁场、胶子场耦合。如果真是这样，那么 Higgs 玻色子就失去了基本性，并且在最基本层面的理论中不具备足够的重要性。

（3）三代轻子的混合没有出现在命题 5.2 中，但会因定义 7.1 给出的规范场的仿射连络表示而在命题 7.1 中自发地产生。

6 强相互作用规范场的仿射连络表示

■ **定义 6.1**：设 $(M,\mathcal{F})$ 和 $(M,\mathcal{G})$ 符合定义 4.5.1 。设 $\mathfrak{D}=r+3=6$ 且 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 都满足 $G^{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}=G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}=G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}$，则 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 可描述强相互作用。

■ **定义 6.2**：根据定义 3.5.1 ，设 $\mathcal{F}$ 的荷是 ρ_{mn}，其中 $m,n=4,5,\cdots,\mathfrak{D}$。定义

$$\begin{cases} d_1 \triangleq \left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)},\ \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\right)^T, \\ d_2 \triangleq \left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)},\ \rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right)^T, \\ d_3 \triangleq \left(\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}},\ \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}\right)^T, \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 \triangleq \left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)},\ \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)}\right)^T, \\ u_2 \triangleq \left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}},\ \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)}\right)^T, \\ u_3 \triangleq \left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)},\ \rho_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}}\right)^T. \end{cases}$$

将 d_1 和 u_1 称为**红色荷**，将 d_2 和 u_2 称为**蓝色荷**，将 d_3 和 u_3 称为**绿色荷。**将 d_1、d_2、d_3 称为**下型色荷**；将 u_1、u_2、u_3 称为**上型色荷。**左、右手色荷分别为

$$\begin{cases} d_{1L} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}+\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\right), \\ d_{2L} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}+\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right), \\ d_{3L} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}+\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} d_{1R} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}-\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\right), \\ d_{2R} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}-\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right), \\ d_{3R} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}-\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1L} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)}+\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)}\right), \\ u_{2L} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}}+\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)}\right), \\ u_{3L} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)}+\rho_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} u_{1R} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)}-\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)}\right), \\ u_{2R} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}}-\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)}\right), \\ u_{3R} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)}-\rho_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}}\right). \end{cases}$$

在 $(M,\mathcal{G})$ 上记

$$g_s \triangleq \sqrt{\left(G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\right)^2+\left(G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right)^2} = \sqrt{\left(G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\right)^2+\left(G^{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}\right)^2} = \sqrt{\left(G^{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}\right)^2+\left(G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right)^2}.$$

$$\begin{cases} U_P^1 \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}\right), \\ V_P^1 \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)P}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} X_P^{23} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)P}\right), \\ Y_P^{23} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)P}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)P}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_P^2 \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}+\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}\right), \\ V_P^2 \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}-\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} X_P^{31} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}+\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\right), \\ Y_P^{31} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}-\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_P^3 \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)P}\right), \\ V_P^3 \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)P}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} X_P^{12} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}P}\right), \\ Y_P^{12} \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)P}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}P}\right). \end{cases}$$

注意到在 U_P^1、U_P^2、U_P^3、V_P^1、V_P^2、V_P^3 中只有 3 个是独立的，无妨设

$$\begin{cases} R_P \triangleq a_R U_P^1 + b_R U_P^2 + c_R U_P^3, \\ S_P \triangleq a_S U_P^1 + b_S U_P^2 + c_S U_P^3, \\ T_P \triangleq a_T U_P^1 + b_T U_P^2 + c_T U_P^3, \end{cases} \quad \begin{cases} U_P^1 \triangleq \alpha_R R_P + \alpha_S S_P + \alpha_T T_P, \\ U_P^2 \triangleq \beta_R R_P + \beta_S S_P + \beta_T T_P, \\ U_P^3 \triangleq \gamma_R R_P + \gamma_S S_P + \gamma_T T_P, \end{cases}$$

其中系数矩阵非异。这样一来，不难发现以下命题成立。

■ **命题 6.1**：设 $\lambda_a\ (a=1,2,\cdots,8)$ 是 Gell-Mann 矩阵，$T_a \triangleq \frac{1}{2}\lambda_a$ 是 $SU(3)$ 群的生成元。当 $(M,\mathcal{G})$ 满足对称条件 $\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}+\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}=0$ 时，记

$$A_P \triangleq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_P^{11} & A_P^{12} & A_P^{13} \\ A_P^{21} & A_P^{22} & A_P^{23} \\ A_P^{31} & A_P^{32} & A_P^{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} A_P^{32} \triangleq X_P^{23} + iY_P^{23} \\ A_P^{23} \triangleq X_P^{23} - iY_P^{23} \\ A_P^{11} \triangleq S_P + \dfrac{1}{\sqrt{6}}T_P \end{cases}, \quad \begin{cases} A_P^{31} \triangleq X_P^{31} + iY_P^{31} \\ A_P^{13} \triangleq X_P^{31} - iY_P^{31} \\ A_P^{22} \triangleq -S_P + \dfrac{1}{\sqrt{6}}T_P \end{cases}, \quad \begin{cases} A_P^{21} \triangleq X_P^{12} + iY_P^{12} \\ A_P^{12} \triangleq X_P^{12} - iY_P^{12} \\ A_P^{33} \triangleq -\dfrac{2}{\sqrt{6}}T_P \end{cases}.$$

那么 $A_P = T_a A_P^a$ 当且仅当 $A_P^1 = X_P^{12}$，$A_P^2 = Y_P^{12}$，$A_P^3 = S_P$，$A_P^4 = X_P^{31}$，$A_P^5 = Y_P^{31}$，$A_P^6 = X_P^{23}$，$A_P^7 = Y_P^{23}$，$A_P^8 = T_P$。

■ **注记 6.1**：一方面，以上命题说明定义 6.1 是强相互作用场的仿射连络表示。它不像主 $SU(3)$-丛理论那样抽象地定义规范势，而是为规范势赋予了具体的几何构造。另一方面，以上命题意味着在合适的对称条

件下，$SU(3)$ 群的代数性质可以用 $\mathcal{G}$ 的内部空间变换群 $GL(3,\mathbb{R})$ 来描述，换句话说，指数映射

$$exp:\ GL(3,\mathbb{R}) \to U(3),\ \ [B_m^a] \mapsto e^{iT_a^m B_m^a}$$

定义了一个覆盖同态，而 $SU(3)$ 是 $U(3)$ 的子群。因此，定义 6.1 与 $SU(3)$ 理论兼容。

7　统一规范场的仿射连络表示

■ **定义 7.1**：设 $(M,\mathcal{F})$ 和 $(M,\mathcal{G})$ 符合定义 4.5.1 。设 $\mathfrak{D}=r+5=8$ 且 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 都满足

$$G^{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-4)}=G^{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-3)},\quad G^{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}=G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}=G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}},$$

则 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 可描述电磁、弱和强相互作用的统一场。

■ **定义 7.2**：根据定义 3.5.1 ，设 $\mathcal{F}$ 的荷是 ρ_{mn}，其中 $m,n=4,5,\cdots,\mathfrak{D}$。定义

$$\begin{cases} l \triangleq \left(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-4)},\ \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-3)}\right)^T, \\ d_1 \triangleq \left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)},\ \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\right)^T, \\ d_2 \triangleq \left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)},\ \rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right)^T, \\ d_3 \triangleq \left(\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}},\ \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}\right)^T, \end{cases} \quad \begin{cases} \nu \triangleq \left(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-4)},\ \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-3)}\right)^T, \\ u_1 \triangleq \left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)},\ \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)}\right)^T, \\ u_2 \triangleq \left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}},\ \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)}\right)^T, \\ u_3 \triangleq \left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)},\ \rho_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}}\right)^T. \end{cases}$$

再记

$$\begin{cases} l_L \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-4)}+\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-3)}\right), \\ l_R \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-4)}-\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-3)}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \nu_L \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-4)}+\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-3)}\right), \\ \nu_R \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-4)}-\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-3)}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{1L} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}+\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\right), \\ d_{2L} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}+\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right), \\ d_{3L} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}+\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} d_{1R} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}-\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\right), \\ d_{2R} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}-\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right), \\ d_{3R} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}-\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1L} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)}+\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)}\right), \\ u_{2L} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}}+\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)}\right), \\ u_{3L} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)}+\rho_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} u_{1R} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)}-\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)}\right), \\ u_{2R} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}}-\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)}\right), \\ u_{3R} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)}-\rho_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}}\right). \end{cases}$$

在 $(M,\mathcal{G})$ 上记

$$\begin{cases} g \triangleq \sqrt{\left(G^{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-4)}\right)^2+\left(G^{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-3)}\right)^2}, \\ g_s \triangleq \sqrt{\left(G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\right)^2+\left(G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right)^2} = \sqrt{\left(G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)}\right)^2+\left(G^{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}\right)^2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \sqrt{\left(G^{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)}\right)^2+\left(G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}\right)^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-4)P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-3)P}), \\ A_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-4)P}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-3)P}), \end{cases} \quad \begin{cases} W^1_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-3)P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-4)P}), \\ W^2_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-3)P}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-4)P}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} U^1_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}\right), \\ V^1_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)P}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} X^{23}_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)P}\right), \\ Y^{23}_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)P}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)P}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} U^2_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}+\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}\right), \\ V^2_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P}-\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} X^{31}_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}+\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\right), \\ Y^{31}_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P}-\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} U^3_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)P}\right), \\ V^3_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)P}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} X^{12}_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)P}+\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}P}\right), \\ Y^{12}_P \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)P}-\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}P}\right). \end{cases}$$

■ **论述 7.1**：由第 2.3 节我们知道，规范标架矩阵 $[B^a_m]\in GL(5,\mathbb{R})$, $(a,m=4,5,\cdots,8)$，故而当 B^a_m 不受任何约束时，我们会得到一个 $GL(5,\mathbb{R})$ 规范理论。考虑到指数映射

$$exp:\ GL(5,\mathbb{R})\to U(5),\ \ [B^a_m]\mapsto e^{iT^m_a B^a_m}$$

是一个覆盖同态，而 $U(1)\times SU(2)\times SU(3)$ 是 $U(5)$ 的子群，所以必然存在关于 B^a_m 的一些约束条件来使 $GL(5,\mathbb{R})$ 约化至 $U(1)\times SU(2)\times SU(3)$，即

$$GL(5,\mathbb{R})\xrightarrow{\text{constraint conditions of } B^a_m} U(1)\times SU(2)\times SU(3).$$

更一般地，假设我们还不知道那个能够确切地描述“真实世界”的对称性是什么，我们只是把它记为 S。那么映射

$$GL(5,\mathbb{R})\xrightarrow{\text{constraint conditions of } B^a_m} S$$

使得我们能够将寻找 S 的问题转化为寻找 B^a_m 的约束条件的问题。“描述 S”和“描述 B^a_m 的约束条件”二者是彼此等价的。

因为规范势 Γ_{mnP} 和粒子场 ρ_{mn} 都是由规范标架场 B^a_m 构造出来的，所以在这里，“描述 B^a_m 的约束条件”显然比“描述 S”更为灵活和方便。

接下来，虽然我们不知道最好的约束条件长什么样，但是我们可以试着去定义一组约束条件，看看能够得到什么。

■ **定义 7.3**：类似于注记 5.2 ，我们定义约束条件如下。

（1）基本条件一：

$$\begin{cases} G^{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-4)} = G^{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-3)}, \\ G^{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)} = G^{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)} = G^{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}, \end{cases}$$

（2）基本条件二：

$$\begin{cases} \Gamma_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-4)P} = \Gamma_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-3)P}, \\ \Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)P} + \Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P} + \Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P} = 0, \end{cases}$$

（3）轻子 PMNS 混合条件一：

$$\begin{cases} \Gamma^{\mathfrak{D}-2}_{(\mathfrak{D}-4)P} = c^{\mathfrak{D}-2}_{\mathfrak{D}-3}\Gamma^{\mathfrak{D}-3}_{(\mathfrak{D}-4)P}, \\ \Gamma^{\mathfrak{D}-1}_{(\mathfrak{D}-4)P} = c^{\mathfrak{D}-1}_{\mathfrak{D}-3}\Gamma^{\mathfrak{D}-3}_{(\mathfrak{D}-4)P}, \\ \Gamma^{\mathfrak{D}}_{(\mathfrak{D}-4)P} = c^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{D}-3}\Gamma^{\mathfrak{D}-3}_{(\mathfrak{D}-4)P}, \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^{\mathfrak{D}-2}_{(\mathfrak{D}-3)P} = c^{\mathfrak{D}-2}_{\mathfrak{D}-4}\Gamma^{\mathfrak{D}-4}_{(\mathfrak{D}-3)P}, \\ \Gamma^{\mathfrak{D}-1}_{(\mathfrak{D}-3)P} = c^{\mathfrak{D}-1}_{\mathfrak{D}-4}\Gamma^{\mathfrak{D}-4}_{(\mathfrak{D}-3)P}, \\ \Gamma^{\mathfrak{D}}_{(\mathfrak{D}-3)P} = c^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{D}-4}\Gamma^{\mathfrak{D}-4}_{(\mathfrak{D}-3)P}, \end{cases} \quad \begin{cases} c^{\mathfrak{D}-2}_{\mathfrak{D}-3} = c^{\mathfrak{D}-2}_{\mathfrak{D}-4}, \\ c^{\mathfrak{D}-1}_{\mathfrak{D}-3} = c^{\mathfrak{D}-1}_{\mathfrak{D}-4}, \\ c^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{D}-3} = c^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{D}-4}, \end{cases}$$

（4）轻子 PMNS 混合条件二：

$$\begin{cases} \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} = \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)}, \\ \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} = \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)}, \\ \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)} = \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} = \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)}, \\ \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} = \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)}, \\ \rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}} = \rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}, \end{cases}$$

（5）夸克 CKM 混合条件一：

$$\begin{cases} \Gamma^{\mathfrak{D}-3}_{(\mathfrak{D}-2)P} = c^{\mathfrak{D}-4}_{\mathfrak{D}-2}\Gamma^{\mathfrak{D}-3}_{(\mathfrak{D}-4)P}, \\ \Gamma^{\mathfrak{D}-3}_{(\mathfrak{D}-1)P} = c^{\mathfrak{D}-4}_{\mathfrak{D}-1}\Gamma^{\mathfrak{D}-3}_{(\mathfrak{D}-4)P}, \\ \Gamma^{\mathfrak{D}-3}_{\mathfrak{D}P} = c^{\mathfrak{D}-4}_{\mathfrak{D}}\Gamma^{\mathfrak{D}-3}_{(\mathfrak{D}-4)P}, \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^{\mathfrak{D}-4}_{(\mathfrak{D}-2)P} = c^{\mathfrak{D}-3}_{\mathfrak{D}-2}\Gamma^{\mathfrak{D}-4}_{(\mathfrak{D}-3)P}, \\ \Gamma^{\mathfrak{D}-4}_{(\mathfrak{D}-1)P} = c^{\mathfrak{D}-3}_{\mathfrak{D}-1}\Gamma^{\mathfrak{D}-4}_{(\mathfrak{D}-3)P}, \\ \Gamma^{\mathfrak{D}-4}_{\mathfrak{D}P} = c^{\mathfrak{D}-3}_{\mathfrak{D}}\Gamma^{\mathfrak{D}-4}_{(\mathfrak{D}-3)P}, \end{cases} \quad \begin{cases} c^{\mathfrak{D}-4}_{\mathfrak{D}-2} = c^{\mathfrak{D}-4}_{\mathfrak{D}-1} = c^{\mathfrak{D}-4}_{\mathfrak{D}}, \\ c^{\mathfrak{D}-3}_{\mathfrak{D}-2} = c^{\mathfrak{D}-3}_{\mathfrak{D}-1} = c^{\mathfrak{D}-3}_{\mathfrak{D}}, \end{cases}$$

（6）夸克 CKM 混合条件二：

$$\begin{cases} \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} = \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} = \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)}, \\ \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} = \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} = \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} = \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} = \rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}}, \\ \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)} = \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)} = \rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}, \end{cases}$$

其中 c^m_n 都是实常数。

■ **命题 7.1**：记

$$
\begin{aligned}
l' \triangleq \Bigg(& \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-4)} + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-2}}{2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)}\right) \\
& \qquad + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-1}}{2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}}}{2}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}\right), \\
& \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-3)} + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-2}}{2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)}\right) \\
& \qquad + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-1}}{2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}}}{2}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}}\right)\Bigg)^T, \\
\nu' \triangleq \Bigg(& \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-4)} + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-2}}{2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)}\right) \\
& \qquad + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-1}}{2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}}}{2}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}\right), \\
& \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-3)} + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-2}}{2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)}\right) \\
& \qquad + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-1}}{2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}}}{2}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}}\right)\Bigg)^T.
\end{aligned}
$$

当 $(M,\mathcal{F})$ 和 $(M,\mathcal{G})$ 满足定义 7.3 的对称条件（1）(2)(3)(4）时，$\mathcal{F}$ 的几何性质 l 和 ν 在 $(M,\mathcal{G})$ 上满足：

$$
\begin{cases}
l_{L;P} = \partial_P l_L - g l_L Z_P - g l_R A_P - g\nu'_L W_P^1, \\
l_{R;P} = \partial_P l_R - g l_R Z_P - g l_L A_P, \\
\nu_{L;P} = \partial_P \nu_L - g\nu_L Z_P - g l'_L W_P^1, \\
\nu_{R;P} = \partial_P \nu_R - g\nu_R Z_P.
\end{cases}
\tag{70}
$$

证明：首先，我们计算 $\mathcal{F}$ 的荷 ρ_{mn} 的协变微分。

$$
\begin{aligned}
\rho_{mn;P} &= \partial_P\rho_{mn} - \rho_{Hn}\Gamma_{mP}^H - \rho_{mH}\Gamma_{nP}^H \\
&= \partial_P\rho_{mn} - \rho_{(\mathfrak{D}-4)n}\Gamma_{mP}^{\mathfrak{D}-4} - \rho_{(\mathfrak{D}-3)n}\Gamma_{mP}^{\mathfrak{D}-3} - \rho_{(\mathfrak{D}-2)n}\Gamma_{mP}^{\mathfrak{D}-2} - \rho_{(\mathfrak{D}-1)n}\Gamma_{mP}^{\mathfrak{D}-1} - \rho_{\mathfrak{D}n}\Gamma_{mP}^{\mathfrak{D}} \\
&\quad - \rho_{m(\mathfrak{D}-4)}\Gamma_{nP}^{\mathfrak{D}-4} - \rho_{m(\mathfrak{D}-3)}\Gamma_{nP}^{\mathfrak{D}-3} - \rho_{m(\mathfrak{D}-2)}\Gamma_{nP}^{\mathfrak{D}-2} - \rho_{m(\mathfrak{D}-1)}\Gamma_{nP}^{\mathfrak{D}-1} - \rho_{m\mathfrak{D}}\Gamma_{nP}^{\mathfrak{D}}.
\end{aligned}
$$

根据定义 7.2 和定义 7.3 ，经过计算最终得到：

$$
\begin{aligned}
l_{L;P} &= \partial_P l_L - g l_L Z_P - g l_R A_P - g\nu_L W_P^1 \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)}\right) + c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)}\right)\right]\frac{g}{\sqrt{2}}W_P^1 \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-1}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)}\right) + c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-1}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)}\right)\right]\frac{g}{\sqrt{2}}W_P^1 \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}}\right) + c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}\right)\right]\frac{g}{\sqrt{2}}W_P^1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{R;P} &= \partial_P l_R - g l_R Z_P - g l_L A_P, \\
\nu_{L;P} &= \partial_P \nu_L - g \nu_L Z_P - g l_L W_P^1 \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)}\right) + c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-2}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} + \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)}\right)\right]\frac{g}{\sqrt{2}}W_P^1 \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-1}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)}\right) + c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-1}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} + \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)}\right)\right]\frac{g}{\sqrt{2}}W_P^1 \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}\right) + c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}} + \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)}\right)\right]\frac{g}{\sqrt{2}}W_P^1, \\
\nu_{R;P} &= \partial_P \nu_R - g \nu_R Z_P.
\end{aligned}
$$

然后，根据 l' 和 ν' 的定义，我们得到

$$
\begin{aligned}
l'_L &= l_L \\
&\quad + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-2}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-1}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}\right) \\
&\quad + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-2}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-1}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}}\right), \\
\nu'_L &= \nu_L \\
&\quad + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-2}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-1}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)} + \rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}\right) \\
&\quad + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-2}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-1}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)}\right) + \frac{c_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}}}{2\sqrt{2}}\left(\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)} + \rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}}\right).
\end{aligned}
$$

代入前式得到：

$$
\begin{cases}
l_{L;P} = \partial_P l_L - g l_L Z_P - g l_R A_P - g \nu'_L W_P^1, \\
l_{R;P} = \partial_P l_R - g l_R Z_P - g l_L A_P,
\end{cases}
,\quad
\begin{cases}
\nu_{L;P} = \partial_P \nu_L - g \nu_L Z_P - g l'_L W_P^1, \\
\nu_{R;P} = \partial_P \nu_R - g \nu_R Z_P.
\end{cases}
\qquad \square
$$

■ **注记 7.1**：以上命题给出了弱相互作用 PMNS 混合的几何起源。在规范场的仿射连络表示中，PMNS 混合作为流形上的几何性质而出现。

在传统物理学中，e、μ、τ 仅仅具有本体论的区别，但不具有数学内涵的区别。相比之下，命题 7.1 告诉我们，三代轻子应该会由 $\{\rho_{pq}, \rho_{qp}\}_{p=4,5;\ q=6,7,8}$ 的不同线性组合来构造。这样一来，e、μ、τ 就能够具有可区分的数学内涵了。比如，设 a_μ、b_μ、$a_{\mu}{}_n^m$、$b_{\mu}{}_n^m$、a_τ、b_τ、$a_{\tau}{}_n^m$、$b_{\tau}{}_n^m$ 都是常数，我们可以设想：

$$
\begin{cases}
e \triangleq l = \left(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-4)},\ \ \rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-3)}\right)^T, \\
\nu_e \triangleq \nu = \left(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-4)},\ \ \rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-3)}\right)^T.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\mu \triangleq a_{\mu}e + \dfrac{1}{2}\Big(a_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-2}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + a_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-1}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} + a_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}, \\
\qquad\qquad a_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-2}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} + a_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-1}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} + a_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)}\Big)^{T}. \\
\nu_{\mu} \triangleq b_{\mu}\nu_{e} + \dfrac{1}{2}\Big(b_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-2}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + b_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-1}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} + b_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}, \\
\qquad\qquad b_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-2}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} + b_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-1}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} + b_{\mu}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)}\Big)^{T}.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\tau \triangleq a_{\tau}\mu + \dfrac{1}{2}\Big(a_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-2}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)} + a_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-1}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)} + a_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}}\rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}, \\
\qquad\qquad a_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-2}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} + a_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-1}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} + a_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}}\rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}}\Big)^{T}. \\
\nu_{\tau} \triangleq b_{\tau}\nu_{\mu} + \dfrac{1}{2}\Big(b_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-2}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)} + b_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}-1}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)} + b_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-3}^{\mathfrak{D}}\rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}, \\
\qquad\qquad b_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-2}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} + b_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}-1}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} + b_{\tau}{}_{\mathfrak{D}-4}^{\mathfrak{D}}\rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}}\Big)^{T}.
\end{cases}
$$

■ **命题 7.2**：当 $(M,\mathcal{F})$ 和 $(M,\mathcal{G})$ 满足定义 7.3 的对称条件（1）(2)(5)(6) 时，记

$$
\begin{aligned}
d'_{1L} \triangleq{}& \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-1}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)} + \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-2}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)} + \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)}\big) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-1}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} + \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-2}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} + \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)}\big), \\
d'_{2L} \triangleq{}& \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)} + \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-1}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}} + \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}\big) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} + \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-1}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}} + \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)}\big), \\
d'_{3L} \triangleq{}& \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-2}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}} + \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)} + \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)}\big) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-2}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}} + \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} + \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)}\big), \\
u'_{1L} \triangleq{}& \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-2}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)} + \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-2}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} + \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)}\big) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-1}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)} + \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-1}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} + \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)}\big), \\
u'_{2L} \triangleq{}& \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-1}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)} + \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-1}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} + \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)}\big) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}} + \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}} + \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)}\big), \\
u'_{3L} \triangleq{}& \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}} + \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}} + \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)}\big) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-2}^{\mathfrak{D}-3}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)} + \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)}\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}c_{\mathfrak{D}-2}^{\mathfrak{D}-4}\big(\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} + \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)}\big).
\end{aligned}
$$

那么 $\mathcal{F}$ 的几何性质 d_1、d_2、d_3、u_1、u_2、u_3 在 $(M,\mathcal{G})$ 上满足：

$$
\begin{aligned}
d_{1L;P} &= \partial_P d_{1L} - g_s d_{1L} U_P^1 + g_s d_{2L} V_P^1 - g_s d_{3L} V_P^1 \\
&\quad - g_s u_{1L} X_P^{23} - \frac{g_s}{2} u_{2L} X_P^{31} + \frac{g_s}{2} u_{2L} Y_P^{31} - \frac{g_s}{2} u_{3L} X_P^{12} - \frac{g_s}{2} u_{3L} Y_P^{12} - g u'_{1L} W_P^1, \\
d_{2L;P} &= \partial_P d_{2L} - g_s d_{2L} U_P^2 + g_s d_{3L} V_P^2 - g_s d_{1L} V_P^2 \\
&\quad - g_s u_{2L} X_P^{31} - \frac{g_s}{2} u_{3L} X_P^{12} + \frac{g_s}{2} u_{3L} Y_P^{12} - \frac{g_s}{2} u_{1L} X_P^{23} - \frac{g_s}{2} u_{1L} Y_P^{23} - g u'_{2L} W_P^1, \\
d_{3L;P} &= \partial_P d_{3L} - g_s d_{3L} U_P^3 + g_s d_{1L} V_P^3 - g_s d_{2L} V_P^3 \\
&\quad - g_s u_{3L} X_P^{12} - \frac{g_s}{2} u_{1L} X_P^{23} + \frac{g_s}{2} u_{1L} Y_P^{23} - \frac{g_s}{2} u_{2L} X_P^{31} - \frac{g_s}{2} u_{2L} Y_P^{31} - g u'_{3L} W_P^1, \\
d_{1R;P} &= \partial_P d_{1R} - g_s d_{1L} V_P^1 + g_s d_{2L} U_P^1 - g_s d_{3L} U_P^1 \\
&\quad + g_s u_{1L} Y_P^{23} + \frac{g_s}{2} u_{2L} X_P^{31} - \frac{g_s}{2} u_{2L} Y_P^{31} - \frac{g_s}{2} u_{3L} X_P^{12} - \frac{g_s}{2} u_{3L} Y_P^{12}, \\
d_{2R;P} &= \partial_P d_{2R} - g_s d_{2L} V_P^2 + g_s d_{3L} U_P^2 - g_s d_{1L} U_P^2 \\
&\quad + g_s u_{2L} Y_P^{31} + \frac{g_s}{2} u_{3L} X_P^{12} - \frac{g_s}{2} u_{3L} Y_P^{12} - \frac{g_s}{2} u_{1L} X_P^{23} - \frac{g_s}{2} u_{1L} Y_P^{23}, \\
d_{3R;P} &= \partial_P d_{3R} - g_s d_{3L} V_P^3 + g_s d_{1L} U_P^3 - g_s d_{2L} U_P^3 \\
&\quad + g_s u_{3L} Y_P^{12} + \frac{g_s}{2} u_{1L} X_P^{23} - \frac{g_s}{2} u_{1L} Y_P^{23} - \frac{g_s}{2} u_{2L} X_P^{31} - \frac{g_s}{2} u_{2L} Y_P^{31}, \\
u_{1L;P} &= \partial_P u_{1L} - g_s u_{1L} U_P^1 - \frac{g_s}{2} u_{2L} X_P^{12} - \frac{g_s}{2} u_{2L} Y_P^{12} - \frac{g_s}{2} u_{3L} X_P^{31} + \frac{g_s}{2} u_{3L} Y_P^{31} \\
&\quad - g_s d_{1L} X_P^{23} + g_s d_{2L} Y_P^{23} - g_s d_{3L} Y_P^{23} - g d'_{1L} W_P^1, \\
u_{2L;P} &= \partial_P u_{2L} - g_s u_{2L} U_P^2 - \frac{g_s}{2} u_{3L} X_P^{23} - \frac{g_s}{2} u_{3L} Y_P^{23} - \frac{g_s}{2} u_{1L} X_P^{12} + \frac{g_s}{2} u_{1L} Y_P^{12} \\
&\quad - g_s d_{2L} X_P^{31} + g_s d_{3L} Y_P^{31} - g_s d_{1L} Y_P^{31} - g d'_{2L} W_P^1, \\
u_{3L;P} &= \partial_P u_{3L} - g_s u_{3L} U_P^3 - \frac{g_s}{2} u_{1L} X_P^{31} - \frac{g_s}{2} u_{1L} Y_P^{31} - \frac{g_s}{2} u_{2L} X_P^{23} + \frac{g_s}{2} u_{2L} Y_P^{23} \\
&\quad - g_s d_{3L} X_P^{12} + g_s d_{1L} Y_P^{12} - g_s d_{2L} Y_P^{12} - g d'_{3L} W_P^1, \\
u_{1R;P} &= \partial_P u_{1R} - g_s u_{1R} U_P^1 + \frac{g_s}{2} u_{2R} X_P^{12} + \frac{g_s}{2} u_{2R} Y_P^{12} + \frac{g_s}{2} u_{3R} X_P^{31} - \frac{g_s}{2} u_{3R} Y_P^{31}, \\
u_{2R;P} &= \partial_P u_{2R} - g_s u_{2R} U_P^2 + \frac{g_s}{2} u_{3R} X_P^{23} + \frac{g_s}{2} u_{3R} Y_P^{23} + \frac{g_s}{2} u_{1R} X_P^{12} - \frac{g_s}{2} u_{1R} Y_P^{12}, \\
u_{3R;P} &= \partial_P u_{3R} - g_s u_{3R} U_P^3 + \frac{g_s}{2} u_{1R} X_P^{31} + \frac{g_s}{2} u_{1R} Y_P^{31} + \frac{g_s}{2} u_{2R} X_P^{23} - \frac{g_s}{2} u_{2R} Y_P^{23}.
\end{aligned}
$$

证明：将定义 7.2 代入 ρ_{mn} 中并考虑定义 7.3 进行计算，再将 d'_{1L}，d'_{2L}，d'_{3L}，u'_{1L}，u'_{2L}，u'_{3L} 代入即可。

□

■ **注记 7.2**：以上命题给出了 CKM 混合的一种几何起源。我们看到，在规范场的仿射连络表示中，d'_{1L}，d'_{2L}，d'_{3L}，u'_{1L}，u'_{2L}，u'_{3L} 作为流形上的几何性质而出现。具体的 CKM 混合关系可在一组附加条件例如

$$
\begin{aligned}
\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)} &= a^{23}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} + a^{13}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} + a^{24}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + a^{14}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} \\
&\quad + a^{23}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} + a^{03}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)} + a^{24}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + a^{04}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}, \\
\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)} &= a^{32}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} + a^{31}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} + a^{42}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)} + a^{41}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)} \\
&\quad + a^{13}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} + a^{03}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)} + a^{14}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} + a^{04}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}, \\
\rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}} &= a^{32}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} + a^{30}\rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}} + a^{42}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)} + a^{40}\rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}} \\
&\quad + a^{31}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} + a^{30}\rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}} + a^{41}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)} + a^{40}\rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}, \\
\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)} &= a^{23}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} + a^{13}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} + a^{24}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + a^{14}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)}, \\
\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)} &= a^{32}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} + a^{31}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} + a^{42}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)} + a^{41}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)}, \\
\rho_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}} &= a^{23}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-3)} + a^{03}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)} + a^{24}\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-4)} + a^{04}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}, \\
\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)} &= a^{32}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-2)} + a^{30}\rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}} + a^{42}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-2)} + a^{40}\rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}, \\
\rho_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}} &= a^{13}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-3)} + a^{03}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-3)} + a^{14}\rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-4)} + a^{04}\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-4)}, \\
\rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)} &= a^{31}\rho_{(\mathfrak{D}-3)(\mathfrak{D}-1)} + a^{30}\rho_{(\mathfrak{D}-3)\mathfrak{D}} + a^{41}\rho_{(\mathfrak{D}-4)(\mathfrak{D}-1)} + a^{40}\rho_{(\mathfrak{D}-4)\mathfrak{D}}
\end{aligned}
$$

下得到。另外，这个命题还说明仿射连络表示不会像一些 GUT 那样造成质子衰变成轻子的问题。

■ **定义 7.4**：如果 $\mathcal{F}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)} = \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)} = \rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}} = \rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)} = \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)} = \rho_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}} = \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)} = \rho_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)} \\
&\qquad = \rho_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}} = 0, \\
&\Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)P} = \Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)P} = \Gamma_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}P} = \Gamma_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-1)P} = \Gamma_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)P} = \Gamma_{(\mathfrak{D}-1)\mathfrak{D}P} = \Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)P} \\
&\qquad = \Gamma_{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)P} = \Gamma_{(\mathfrak{D}-2)\mathfrak{D}P} = 0,
\end{aligned}
$$

则称 $\mathcal{F}$ 为**轻子场**，否则称为**强子场**。设 $\mathcal{F}$ 是强子场，如果 $\mathcal{F}$ 满足 d_1、d_2、d_3、u_1、u_2、u_3 这六者中有五个为零，剩下一个非零，则将 f 称为**单独的夸克**。

■ **命题 7.3**：不存在单独的夸克，即：如果 d_1、d_2、d_3、u_1、u_2、u_3 这六者中有五个为零，那么 $d_1 = d_2 = d_3 = u_1 = u_2 = u_3 = 0$。

对于单独的下型夸克来说，这是明显的。无妨设 $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ 且 $d_1 = d_2 = 0$，这时 $\rho_{(\mathfrak{D}-2)(\mathfrak{D}-2)} = \rho_{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-1)} = \rho_{\mathfrak{D}\mathfrak{D}} = 0$，于是必有 $d_3 = 0$。

对于单独的上型夸克来说，本文尚未在证明上取得进展。尽管如此，命题 7.3 为色禁闭提供了一种新的几何理解，这本身就是重要的。它涉及曲率在不同维度之间的一种自然而然的几何约束。

8 结论

一、本文建立了规范场的仿射连络表示，有以下几个主要观点：

（1）全连络 (3) 式包含了比 Levi-Civita 连络更多的几何信息，它可以统一地描述规范场和引力场。

（2）时间是关于内部坐标空间和外部坐标空间所有维度的总度量。

（3）实际（on-shell）演化由梯度方向来刻画。

（4）量子理论是梯度方向分布的几何理论，它有第 3.9 节所述的几何意义。

二、在规范场的仿射连络表示中，实现了以下统一的数学描述：

（1）引力场和规范场都能用仿射连络来表示，它们有统一的坐标描述。全连络 Γ^M_{NP} 的一部分描述电磁、弱和强相互作用场等规范场，Γ^M_{NP} 的另一部分描述引力场。

（2）规范场和基本粒子场有统一的几何构造，它们都是用半度规构造的几何实体。ρ_{MN} 的 $m, n \in \{4, 5, \cdots, \mathfrak{D}\}$ 的分量 ρ_{mn} 描述轻子和夸克，ρ_{MN} 的其余分量可能描述暗物质粒子场。

（3）规范场和基本粒子场的物理演化有统一的几何描述，它们的实际（on-shell）演化和量子演化都表现为有关梯度方向的几何性质。

（4）量子理论和引力理论有统一的几何解释和相同的时空观，它们都反映了流形的内蕴几何性质。

三、规范场的仿射连络表示的其他优点：

（1）相互作用的耦合常数的几何意义得到了更清晰的理解。

（2）手征不对称性、PMNS 混合和 CKM 混合作为流形上的几何性质而出现。

（3）可以避免质子衰变成轻子的问题。

（4）夸克的色禁闭会有一种几何解释。

这些物理性质在仿射连络表示中可以得到更好的理解。因此，用仿射连络来表示规范场很可能是通往物理学终极理论的必经之路。

参考文献

[1] T W B Kibble. Lorentz invariance and the gravitational field. *Journal of Mathematical Physics*, 2(2):212–221, 1961.

[2] DW Sciama. Recent developments in general relativity. *Festschrift for Infeld, Pergamon, Oxford*, 415, 1962.

[3] J P Harnard and R B Pettitt. Gauge theories for space-time symmetries. i. *Journal of Mathematical Physics*, 17(10):1827–1837, 1976.

[4] Paul von der Heyde. The field equations of the poincaré gauge theory of gravitation. *Physics Letters A*, 58(3):141–143, 1976.

[5] Y M Cho. Gauge theory, gravitation, and symmetry. *Physical Review D*, 14:12(12):3341–3344, 1976.

[6] Friedrich W Hehl, G David Kerlick, and James M Nester. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Reviews of Modern Physics*, 48(3):393–416, 1976.

[7] S W MacDowell and F Mansouri. Unified geometric theory of gravity and supergravity. *Physical Review Letters*, 38(23):739–742, 1977.

[8] J L Chkareuli. On the origin of poincaré gauge gravity. *Physics Letters B*, 769:377–384, 2017.

[9] J L Chkareuli. Poincaré gauge gravity an emergent scenario. *Physical Review D*, 95(8):084051, 2017.

[10] Yuri N Obukhov. Poincaré gauge gravity: An overview. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15(supp01):1840005–342, 2018.

[11] Yuri N Obukhov and Friedrich W Hehl. General relativity as a special case of poincaré gauge gravity. *Physical Review D*, 102(4):044058, 2020.

[12] Friedrich W Hehl, G David Kerlick, and Paul von der Heyde. On hypermomentum in general relativity i. the notion of hypermomentum. *Ztschrift Fur Naturforschung A*, 31(2), 1976.

[13] Friedrich W Hehl, G David Kerlick, and Paul von der Heyde. On hypermomentum in general relativity. ii. the geometry of space-time. *Zeitschrift Fur Naturforschung A*, 31(6):524–527, 1976.

[14] Friedrich W Hehl, G David, Kerlick, and Paul von der Heyde. On hypermomentum in general relativity iii. coupling hypermomentum to geometry. *Zeitschrift Fur Naturforschung A*, 31(7):823–827, 1976.

[15] Friedrich W Hehl. On a new metric affine theory of gravitation. *Physics Letters B*, 63(4):446–448, 1976.

[16] Friedrich W Hehl, Eric A Lord, and Y Ne'Eman. Hadron dilation, shear and spin as components of the intrinsic hypermomentum current and metric-affine theory of gravitation. *Physics Letters B*, 71(2):432–434, 1977.

[17] Eric A Lord. The metric-affine gravitational theory as the gauge theory of the affine group. *Physics Letters A*, 65(1):1–4, 1978.

[18] Friedrich W Hehl, J Dermott Mccrea, Eckehard W Mielke, and Yuval Ne'Eman. Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance. *Physics Reports-review Section of Physics Letters*, 258, 1995.

[19] Rodrigo F Sobreiro and Victor J Vasquez Otoya. Affine gauge theory of gravity and its reduction to the riemann-cartan geometry. *Journal of Physics Conference*, 283(1), 2010.

[20] Rodrigo F Sobreiro and Victor J Vasquez Otoya. On the topological reduction from the affine to the orthogonal gauge theory of gravity. *Journal of Geometry and Physics*, 61(1):137–150, 2011.

[21] Diego Julio Cirilo-Lombardo. Unified field theoretical models from generalized affine geometries. *International Journal of Theoretical Physics*, 49(6):1288–1301, 2010.

[22] Diego Julio Cirilo-Lombardo. Unified field theoretical models from generalized affine geometries ii. *International Journal of Theoretical Physics*, 50(6):1699–1708, 2011.

[23] Diego Julio Cirilo-Lombardo. Unified field theoretical models from generalized affine geometries iii. *International Journal of Theoretical Physics*, 50(11):3621–3634, 2011.

[24] Theodor Kaluza. Zum unitätsproblem der physik. *Sitzungsber Preuss Akad Wiss Berlin(Math. Phys.)*, pages 966–972, 1921.

[25] Oskar Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik A*, 37(12):895–906, 1926.

[26] Oskar Klein. The atomicity of electricity as a quantum theory law. *Nature*, 118:516, 1926.

[27] P Goddard, J Goldstone, C Rebbi, et al. Quantum dynamics of a massless relativistic string. *Nuclear Physics*, 56(1):109–135, 1973.

[28] J Polchinski, S Chaudhuri, and C V Johnson. Notes on d-branes. *arXiv:hep-th/9602052v2*, 1996.

[29] W Taylor. Lectures on d-branes, gauge theory and m(atrices). *arXiv:hep-th/9801182v2*, 1998.

[30] C P Bachas. Lectures on d-branes. *arXiv:hep-th/9806199v2*, 1999.

[31] A Giveon and D Kutasov. Brane dynamics and gauge theory. *Review of Modern Physics*, 71(4):310–318, 1998.

[32] J Wess and B Zumino. Supergauge invariant extension of quantum electrodynamics. *Nuclear Physics B*, 78(1):1–13, 1974.

[33] A Hanany and E Witten. Type iib superstrings, bps monopoles, and three-dimensional gauge dynamics. *Nuclear Physics B*, 492(1-2):152–190, 1997.

[34] Michael R Douglas, Suresh Govindarajan, T Jayaraman, et al. D-branes on calabi–yau manifolds and superpotentials. *Communications in Mathematical Physics*, 248(1):85–118, 2004.

[35] Howard E Haber and G L Kane. The search for supersymmetry: Probing physics beyond the standard model. *Physics Reports*, 117(2-4):75–263, 1985.

[36] John F Gunion and Howard E Haber. Higgs bosons in supersymmetric models (i). *Nuclear Physics B, Particle Physics*, 272(1):1–76, 1986.

[37] John F Gunion and Howard E Haber. Higgs bosons in supersymmetric models (ii). implications for phenomenology. *Nuclear Physics B, Particle Physics*, 278(3):449–492, 1986.

[38] John F Gunion and Howard E Haber. Higgs bosons in supersymmetric models (iii). decays into neutralinos and charginos. *Nuclear Physics B, Particle Physics*, 307(3):445–475, 1988.

[39] John F Gunion and Howard E Haber. Errata for higgs bosons in supersymmetric models: I, ii and iii. *arXiv:hep-ph/9301205v1*, 1993.

[40] Tai Tsun Wu and Chen Ning Yang. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Physical Review D*, 12(12):3845–3857, 1975.

[41] Shiing Shen Chern, Wei Huan Chen, and K S Lam. *Lecture on Differential Geometry*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1999.

[42] Otton Nikodym. Sur une generalisation des integrales de mj radon. *Fundamenta Mathematicae*, 15(1):131–179, 1930.